МАТЕМАТИКА

НОВОЕ В ЗАРУБЕЖНОЙ НАУКЕ

РЕДАКТОРЫ СЕРИИ. А. Н. КОЛМОГОРОВ. С. П. НОВИКОВ

27

Т. ЧЕПМЭН

ЛЕКЦИИ О Q-МНОГООБРАЗИЯХ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР» МОСКВА

ИЗДАТЕЛЬСТВО • МИР •

Conference Board of the Mathematical Sciences
REGIONAL CONFERENCE SERIES IN MATHEMATICS
supported by the
National Science Foundation

Number 28

LECTURES ON HILBERT CUBE MANIFOLDS

by
T. A. CHAPMAN

Published for the
Conference Board of the Mathematical Sciences
by the
American Mathematical Society
Providence, Rhode Island
1976

МАТЕМАТИКА

НОВОЕ В ЗАРУБЕЖНОЙ НАУКЕ

РЕДАКТОРЫ СЕРИИ: А. Н. КОЛМОГОРОВ, С. П. НОВИКОВ

27

Т. ЧЕПМЭН

ЛЕКЦИИ О Q-МНОГООБРАЗИЯХ

Перевод с английского
В. В. ФЕДОРЧУКА и В. В. ФИЛИППОВА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР» МОСКВА 1981

УДК 513.83

Книга американского математика, получившего фундаментальные результаты в бурно развивающейся в последние годы интересной области топологии — теории бесконечномерных многообразий. Содержит доступное изложение основ этой теории, а также некоторые новые результаты. Автору удалось, опираясь на наглядные геометрические представления, лаконично доказать ряд известных специалистам теорем, которые ранее доказывались с использованием весьма сложной техники.

Книга привлечет внимание математиков разных специальностей к этой области топологии, имеющей широкие связи со многими современными проблемами.

Редакция литературы по математическим наукам

1702050000

$\text{Ч}\frac{20203-020}{041(01)-81}$ 20—81 ч. 1

ОТ ПЕРЕВОДЧИКОВ

Общая теория бесконечномерных многообразий начала развиваться примерно 15 лет назад. Привлек внимание топологов к этой области математики Р. Андерсон, начавший с доказательства того, что произведение триода на гильбертов куб гомеоморфно гильбертову кубу. За короткий срок усилиями в основном американских и отчасти польских топологов была построена довольно разветвленная теория. Большой вклад в построение этой теории внес автор предлагаемой вниманию читателей книги, доказавший, в частности, теорему о триангулируемости Q-многообразий и топологическую инвариантность кручения Уайтхеда.

В книге излагаются основы теории Q-многообразий — пространств, локально гомеоморфных гильбертову кубу Q. Она отличается стройностью композиции и краткостью изложения. Правда, вторая особенность не всегда является достоинством: в ряде мест читателю придется самому восстанавливать доказательства по кратким намекам. Мы ограничились лишь небольшим числом примечаний и устранили некоторые явные погрешности.

За пять лет, прошедших с момента выхода американского издания книги, часть затронутых в ней вопросов получила дальнейшее развитие. В частности, решены некоторые проблемы, сформулированные в добавлении, которое написано Андерсоном, Кёртисом, Козловским и Шори. Упомянем здесь лишь теорему Торунчика о характеризации Q-многообразий и l_2-многообразий [58], пример Уолша бесконечномерного компакта без подпространств конечной положительной размерности [61], пример Веста нетривиального расслоения, пространство, база и слой которого гомеоморфны гильбертову кубу [59]. Некоторые из проблем потеряли интерес, ибо оказались в стороне от основного русла развития теории. Недавно Гэган

опубликовал исправленный и расширенный список нерешенных проблем в виде отдельной статьи [57]. Сравнительное изучение этих версий поможет читателю определить наиболее перспективное направление исследований.

Мы надеемся, что книга представит интерес не только для специалистов в области топологии. Она привлечет внимание всех математиков, интересующихся современными проблемами топологии и вопросами ее приложений.

Москва — Аннаба (Алжир) *В.В. Федорчук, В.В. Филиппов*
29 января 1981г.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Цель настоящих лекций — представить введение в геометрическую топологию гильбертова куба Q и сепарабельных метрических многообразий, смоделированных на Q, которые мы называем *Q-многообразиями.* Интенсивное исследование гильбертова куба и Q-многообразий за последние десять лет дало много результатов, рассеянных в журнальной литературе. Мы представляем здесь замкнутое изложение только некоторых из этих результатов с надеждой стимулировать дальнейший интерес к этой области. Здесь не представлено никаких новых материалов, равно как и нет стремления к исчерпывающей полноте. Например, опущена важная теорема Веста — Шори, утверждающая, что пространство замкнутых подмножеств отрезка [0, 1] гомеоморфно Q. В добавлении (подготовленном Андерсоном, Кёртисом, Шори и Козловским) приведен список проблем, представляющих интерес в настоящее время. Он содержит проблемы как о Q-многообразиях, так и о многообразиях, смоделированных на различных линейных пространствах. Мы отсылаем к ним читателя с целью указать значительно более широкие перспективы в данной области.

Теория Q-многообразий представляется в некотором смысле теорией «устойчивых» кусочно-линейных (PL) n-многообразий. Это представление становится более определенным в свете триангуляционной и классификационной теорем из гл. XI и XII. В частности, все ручки могут быть выпрямлены, и, следовательно, все Q-многообразия могут быть триангулированы. Однако в конечномерном случае существуют требующие тонких рассмотрений препятствия, которые в теории Q-многообразий не возникают. Вот почему доказательства топологической инвариантности кручения Уайтхеда (гл. XII) и конечности гомотопических типов компактных ANR (гл. XIV) вначале проводятся на уровне Q-многообразий.

В первых четырех главах мы излагаем основные средства, которые применяются во всех последующих главах. Далее возможны по крайней мере два способа изучения материала. Читателю, которого интересуют только триангуляция и классификация Q-многообразий, следует читать все подряд (кроме

гл. VI). В частности, топологическая инвариантность кручения Уайтхеда доказывается в § 38. Читателю, которого интересует недавнее данное Р. Д. Эдвардсом доказательство того факта, что каждый ANR является $Q = M$-фактором, следует прочесть первые четыре главы и затем, изучив 26.1, перейти к гл.XIII и XIY.

Эти лекции были прочитаны в октябре 1975 г. в Колледже в Гилфорде как часть программы региональной конференции, организованной Советом по проведению конференций в области математических наук при содействии Национального научного фонда. Я хотел бы выразить благодарность Совету, предоставившему такую возможность, а также математическим факультетам Колледжа в Гилфорде и Университета шт. Северная Каролина в Гринсборо за их сердечное гостеприимство. Я также признателен Зибенману и Майку Хэнделу за полезные замечания, касающиеся первоначальных набросков отдельных разделов рукописи.

Т.А. Чепмэн

I. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

В этой главе мы введем основные понятия, необходимые нам для дальнейшего. Прочие определения будут дополнительно вводиться в основном тексте по мере надобности.

§ 1. Основные определения. Для пространства X и подмножества $A \subset X$ символы Int_X, $\mathrm{Bd}_X(A)$ и $Cl_X(A)$ обозначают соответственно топологическую внутренность, границу и замыкание множества A в пространстве X. Мы используем символ id_X для обозначения тождественного отображения пространства X на себя и символ $A \hookrightarrow X$ (или id_A, когда это будет более подходить по смыслу) для включения A в X. Обычно в таких обозначениях мы будем опускать индекс X, если это не вызывает недоразумений.

Все отображения и функции подразумеваются непрерывными, гомеоморфизм накрывает область значений, *вложение* $f: X \to Y$ есть гомеоморфизм пространства X на образ $f(X) \subset Y$. Запись $X \cong Y$ означает, что пространство X гомеоморфно пространству Y. *Гомотопия* $F: X \times I \to Y$ (где $I = [0, 1]$) есть отображение произведения $X \times I$ в пространство Y, и для $t \in I$ $F_t: X \to Y$ есть отображение, заданное формулой $F_t(x) = F(x, t)$. Гомотопность двух отображений f и g (т.е. существование гомотопии F, для которой $F_0 = f$ и $F_1 = g$) будем обозначать $f \simeq g$.

Для отображений f, $g: X \to Y$ и ограниченной метрики d на пространстве Y определим

$$d(f, g) = \sup \{ d(f(x), g(x)) \mid x \in X \}.$$

Для компактных пространств $d(f, g)$ в точности описывает требуемую нам «близость» между отображениями. В общем (некомпактном) случае введем «близость» следующим образом: пусть f, $g: X \to Y$ два отображения, $\mathscr{U}$ — открытое покрытие пространства Y; будем говорить, что отображение f *$\mathscr{U}$-близко* к отображению g, если для всякой точки $x \in X$ найдется элемент покрытия $\mathscr{U}$, содержащий точки $f(x)$ и $g(x)$ одновременно. Отображение $f: X \to Y$ будем называть *почти гомеоморфизмом,* если для любого открытого покрытия $\mathscr{U}$ пространства Y

найдется гомеоморфизм пространства X на пространство Y, $\mathcal{U}$-близкий к f.

Все рассматриваемые пространства будут у нас локально компактными, сепарабельными и метризуемыми (если явно не оговорено противное). Буквой d, когда это не приведет к путанице, мы будем обозначать метрику рассматриваемого пространства.

§ 2. Гильбертов куб. Гильбертов куб Q есть счетное бесконечное произведение (с тихоновской топологией)

$$Q = \prod_{i=1}^{\infty} I_i,$$

в котором каждый из сомножителей I_i есть (замкнутый) отрезок $[-1, 1]$. Как хорошо известно, Q есть сильно бесконечномерный компакт, *абсолютный ретракт* (AR), и всякое сепарабельное метрическое пространство может быть вложено в Q. Точки куба Q записываются последовательностями: $q = (q_i)$, где $q_i \in I_i$, и стандартная метрика в Q задается формулой:

$$d((q_i),(r_i)) = \sum_{i=1}^{\infty} |q_i - r_i| / 2^i.$$

Псевдовнутренностью куба Q называется подпространство

$$s = \prod_{i=1}^{\infty} I_i^0,$$

где I_i^0 есть открытый интервал $(-1, 1)$, и множество $B(Q) = Q - s$ называется *псевдограницей* гильбертова куба. Читатель должен отдавать себе отчет, что между свойствами пространств Q, s и $B(Q)$ и их конечномерных аналогов есть ощутимая разница. Например, множество $B(Q)$ плотно в кубе Q, а пространство s не σ-компактно!

Для $n \geqslant 1$ пусть

$$I^n = I_1 \times \ldots \times I_n \quad (\textit{стандартная n-мерная клетка}),$$

$$Q_n = I_n \times I_{n+1} \times \ldots \quad (\text{гильбертов куб});$$

в этих обозначениях $Q = I^n \times Q_{n+1}$. Точку $(0, 0, \ldots) \in Q_n$ будем обозначать сокращенно 0.

§ 3. Z-множества. Теперь, следуя Р.Д. Андерсону, введем понятие Z-множества, являющееся одним из наиболее важных в бесконечномерной топологии.

Замкнутое множество A пространства X называется *Z-множеством* в X, если тождественное отображение id_X может быть сколь угодно близко аппроксимировано непрерывными отображениями X в $X \setminus A$, т.е. для произвольного открытого покрытия $\mathscr{U}$ пространства X найдется непрерывное отображение X в $X \setminus A$, $\mathscr{U}$-близкое к тождественному отображению id_X.

Примеры Z-множеств:

(i) подмножество A гильбертова куба Q, если $A \subset s$ и A есть компакт,

(ii) конечное подмножество гильбертова куба Q,

(iii) подмножество $X \times \{0\}$ пространства $X \times [0, 1]$, где X — произвольное пространство,

(iv) любое замкнутое подмножество n-мерного многообразия M, лежащее в его комбинаторной границе ∂M.

(В связи с (iv) отметим, что непустое замкнутое подмножество комбинаторной внутренности многообразия M не может быть Z-множеством в M.) Вложение $f: X \to Y$ называется *Z-вложением,* если $f(X)$ есть Z-множество в пространстве Y. В следующем утверждении мы установим некоторые основные свойства Z-множеств. Пространство X предполагается локально компактным.

3.1. ТЕОРЕМА. (1) *Если $A \subset X$ есть Z-множество и $h: X \to Y$ — гомеоморфизм, то $h(A) \subset Y$ есть Z-множество.*

(2) *Если $A \subset X$ есть Z-множество и множество $B \subset A$ замкнуто, то $B \subset X$ есть Z-множество.*

(3) *Если множество $A \subset X$ замкнуто и $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, где все $A_n \subset X$ — Z-множества, то и $A \subset X$ есть Z-множество.*

(4) *Если $A \subset U \subset X$, множество A замкнуто, а множество U открыто в X и $A \subset U$ есть Z-множество, то $A \subset X$ есть Z-множество.*

(5) *Если $A \subset X$ есть Z-множество, X есть ANR и множество $U \subset X$ открыто, то $A \cap U \subset U$ есть Z-множество.*

Доказательство. (1) и (2) тривиальны. (3) Пусть $\mathscr{U}$ есть открытое покрытие пространства X и для любого $n = 1, 2, \ldots,$ $f_n: X \to X \setminus A_n$ есть непрерывное отображение. Можно выбрать f_n достаточно близким к id так, чтобы бесконечная левая композиция

$$f = \lim_{n \to \infty} f_n f_{n-1} \ldots f_2 f_1$$

определяла отображение X в $X \setminus A$, $\mathscr{U}$-близкое к id. Мы предпо-

лагаем (метрическое) пространство X полным, поэтому нужные для существования предела отображения f_n подобрать легко (достаточно взять f_n так, чтобы $d(f_n, \mathrm{id}) < 1/2^n$). Нетрудно выбрать f_n так, чтобы отображение f было бы $\mathscr{U}$-близким к id. Чтобы получить $f(X) \cap A = \varnothing$, отметим, что по теореме 4.1 (см. ниже) мы можем выбрать отображение f_1 таким, что множество f_1X замкнуто. Отображения $f_2, f_3, \ldots$ выбираем теперь таким образом, чтобы $f(X) \cap A_1 = \varnothing$. Повторяя применение этой идеи при индуктивном построении отображений f_n, мы добиваемся выполнения $f(X) \cap A_n = \varnothing$ при всех n.

(4) Отметим, что отображение $f\colon U \to U \setminus A$ может быть выбрано достаточно близким к id_U и продолжаемым на $X \setminus U$ тождественным отображением до отображения $\tilde{f}\colon X \to X \setminus A$. Этого можно добиться, взяв отображение f $\mathscr{U}$-близким к id_U для такого покрытия $\mathscr{U}$, диаметр элементов которого стремится к нулю при приближении к $X \setminus U$.

(5) Отметим прежде всего, что по (3) достаточно рассмотреть случай, когда множество A компактно. Возьмем открытые в пространстве X множества U_1 и U_2, такие, что

$$A \subset U_1 \subset Cl_X(U_1) \subset U_2 \subset Cl_X(U_2) \subset U.$$

Для достаточно близкого к id_X отображения $f\colon X \to X \setminus A$

$$f(Cl_X(U_2) \setminus U_1) \subsetneq U \setminus A$$

и ограничение

$$f|_{Cl_X(U_2) \setminus U_1}\colon Cl_X(U_2) \setminus U_1 \to U \setminus A$$

гомотопно включению, причем гомотопия осуществляется по подпространству $U \setminus A$. (Здесь мы используем тот факт, что близкие отображения в ANR (а таковым является подпространство $U \setminus A$) могут быть связаны «малой» гомотопией.) Используя эту гомотопию, легко построить такое отображение

$$g\colon Cl_X(U_2) \setminus U_1 \to U \setminus A,$$

что $g|_{\mathrm{Bd}_X(U_2)} = \mathrm{id}$ и $g = f$ на $\mathrm{Bd}_X(U_1)$. Продолжаем g до отобра-

жения $\tilde{g}\colon U \to U\setminus A$, полагая

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} g(x) & \text{при } x \in Cl_X(U_2) \setminus U_1, \\ x & \text{при } x \in U \setminus U_2, \\ f(x) & \text{при } x \in U_1. \end{cases}$$

Очевидно, сдвиг $\tilde{g}$ может быть сделан сколь угодно малым при соответствующем выборе отображения f. ■

§ 4. Собственные отображения. Отображение $f\colon X \to Y$ называется *собственным,* если полный прообраз $f^{-1}(C)$ произвольного компакта $C \subset Y$ является компактом. Понятия собственной гомотопии, собственной гомотопической эквивалентности и т. д. вводятся теперь аналогично соответствующим обычным понятиям. В качестве примера заметим, что пространства $[0, 1)$ и $(0, 1)$ имеют один гомотопический тип, но различны в смысле собственной гомотопической эквивалентности. (Доказательство оставляется читателю.)

Следующие основные сведения о собственных отображениях будут нам полезны. Напомним еще раз, что все пространства предполагаются локально компактными.

4.1. Теорема. (1) *Если отображение $f\colon X \to Y$ является собственным, то множество $f(X)$ замкнуто в пространстве Y.* (2) *Для всякого пространства Y можно указать такое открытое покрытие $\mathscr{U}$, что для произвольного пространства X и любых двух $\mathscr{U}$-близких отображений $f, g\colon X \to Y$ отображение f собственно тогда и только тогда, когда собственно отображение g.*

Доказательство. (1) Достаточно доказать компактность множества $f(X) \cap C$ для произвольного компакта $C \subset Y$. Для этого отметим, что множество $f(X) \cap C$ замкнуто в подпространстве $f(X) \subset Y$ и совпадает с компактом $ff^{-1}(C) \subset f(X)$.

(2) Представим пространство Y в виде объединения $Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$ компактов C_n, таких, что $C_n \subset \mathrm{Int}(C_{n+1})$. Пусть

$$U_1 = \mathrm{Int}(C_2),$$

$$U_2 = \mathrm{Int}(C_3) - C_1,$$

$$U_3 = \mathrm{Int}(C_4) - C_2$$

....

Убедиться в том, что открытое покрытие $\mathscr{U}=\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ пространства Y удовлетворяет нашим условиям, не составляет труда. ■

§ 5. Критерий сходимости. В дальнейшем в некоторых случаях нам полезно будет знать, что бесконечная композиция последовательности гомеоморфизмов есть гомеоморфизм. Для этих целей нам будет полезна

5. 1. Теорема. *Пусть пространство X локально компактно и для любого целого $n \geqslant 1$ $\mathscr{H}_n$ есть такое семейство гомеоморфизмов пространства X на себя, что для произвольного открытого покрытия $\mathscr{U}$ пространства X найдется гомеоморфизм $f \in H_n$, $\mathscr{U}$-близкий к* id. *Тогда можно выбрать отображения $h_n \in \mathscr{H}_n$ так, что отображение*

$$h = \lim_{n \to \infty} h_n h_{n-1} \ldots h_1$$

определяет гомеоморфизм пространства X на себя. Более того, отображение h может быть построено сколь угодно близким к id.

Доказательство. Предположим сначала дополнительно, что пространство X компактно. Определим расстояние между гомеоморфизмами f; $g: X \to X$

$$\rho(f, g) = d(f, g) + d(f^{-1}, g^{-1}).$$

Если $\mathscr{H}(X)$ есть пространство гомеоморфизмов пространства X на себя с обычной sup-метрикой d, то, как читатель легко может проверить, ρ есть эквивалентная метрике d полная метрика для пространства $\mathscr{H}(X)$. Используя эту метрику, мы можем выбрать отображения $h_n \in \mathscr{H}_n$ таким образом, что последовательность $\{h_n \ldots h_1\}_{n=1}^{\infty}$ будет последовательностью Коши и поэтому отображение

$$h = \lim_{n \to \infty} h_n \ldots h_1$$

будет гомеоморфизмом. Очевидно, отображение h может быть построено сколь угодно близким к id . Компактный случай нами разобран.

Некомпактный случай сводится к компактному следующим образом. Вместе с некомпактным пространством X рассмотрим его одноточечную компактификацию $\tilde{X} = X \cup \{\infty\}$ и определим отображение

$$\varphi: \mathscr{H}(X) \to \mathscr{H}(\tilde{X})$$

следующим образом: $\varphi(h)|_X = h$, $\varphi(h)(\infty) = \infty$. Если пространство $\mathscr{H}(X)$ рассматривается с компактно-открытой топологией, а пространство $\mathscr{H}(\tilde{X})$ с указанной выше метрикой, то, как читатель может убедиться, отображение φ является непрерывным. Опираясь на рассмотренный компактный случай, мы можем так выбрать $h_n \in \mathscr{H}_n$, что отображение

$$\tilde{h} = \lim_{n \to \infty} \varphi(h_n) \ldots \varphi(h_1)$$

будет гомеоморфизмом. Нам осталось взять $h = \varphi^{-1}(\tilde{h})$. Если при этом построении выбирать отображение h_n достаточно близким к id, то отображение h может быть сделано сколь угодно близким к id. ■

Замечания

§ 3. Понятие Z-множества введено Р.Д. Андерсоном [2] (точнее, там речь идет о свойстве Z), чтобы обобщить понятие топологической бесконечной коразмерности. После этого оно использовалось почти во всех работах по бесконечномерной топологии. В [2] было дано следующее определение: «Замкнутое подмножество A пространства X обладает свойством Z в X, если для всякого непустого стягиваемого открытого в пространстве X множества U множество $U \setminus A$ непусто и стягиваемо в $X \setminus A$». Во всех наших приложениях это определение согласуется с определением, данным нами в § 3.

§ 5. Критерий сходимости, подобный данному нами в 5.1, был получен Андерсоном [2] для компактных метрических пространств. Чтобы его сформулировать, введем обозначения.

Для произвольных $\varepsilon > 0$ и гомеоморфизма $h: X \to X$ пусть $A(h, \varepsilon) = \{\theta \mid$ найдутся $x, y \in X$, для которых $d(x, y) > \varepsilon$ и $d(h(x), h(y)) = \theta\}$, $a(h, \varepsilon) = \inf A(h, \varepsilon)$.

Андерсон доказал следующую теорему.

Теорема. *Если $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ есть последовательность гомеоморфизмов компактного метрического пространства X на себя, для которых при $n \geqslant 2$*

$$d(h_n, \mathrm{id}) < \min(3^{-n}, 3^{-n} a(h_{n-1} \ldots h_1, 2^{-n})),$$

то отображение $h = \lim_{n \to \infty} h_n \ldots h_1$ есть гомеоморфизм пространства X на себя.

Этот вариант критерия сходимости хорош тем, что позволяет оценить, насколько отображение h_n должно быть близким к id, чтобы предельный гомеоморфизм $\lim_{n \to \infty} h_n \ldots h_1$ существовал.

II. Z-МНОЖЕСТВА ГИЛЬБЕРТОВА КУБА

В этой главе мы будем изучать Z-множества в гильбертовом кубе Q. Нашими основными результатами будут теоремы 11.1 и 11.2.

Мы докажем (теорема 11.1), что гомеоморфизм между Z-множествами пространства Q продолжается до гомеоморфизма всего пространства Q на себя и (теорема 11.2) что отображение компакта в пространство Q может быть аппроксимировано Z-вложениями. Прежде всего мы сделаем это для компактов, лежащих в псевдовнутренности s гильбертова куба Q (теоремы 7.1 и 8.1). Для этого дадим следующие определения.

Скажем, что гомеоморфизм $h: Q \to Q$ *сохраняет псевдограницу,* если $h(B(Q)) = B(Q)$.

Пусть $p_i: Q = \prod_{k=1}^{\infty} I_k \to I_i = [0, 1]$ — проекция гильбертова куба на i-й сомножитель. Гранью куба Q назовем множество вида

$$W_n = \{ (q_i) \in Q \mid q_n = 1 \}, \quad W'_n = \{ (q_i) \in Q \mid q_n = -1 \}.$$

§ 6. Бесконечная коразмерность. Будем говорить, что множество $A \subset s$ имеет *бесконечную коразмерность,* если для бесконечного числа индексов i проекция $p_i(A)$ состоит из одной точки. Весьма важным является то, что гомеоморфизмом пространства Q на себя любой компакт, лежащий в псевдовнутренности s, может быть переведен в множество бесконечной коразмерности (теорема 6.2). Основной шаг на этом пути заключен в следующем утверждении.

6.1. Лемма. *Если множество $A \subset s$ компактно, то существует такой сохраняющий псевдограницу гомеоморфизм $h: Q \to Q$, что $p_1 h(A) = \{0\}$.*

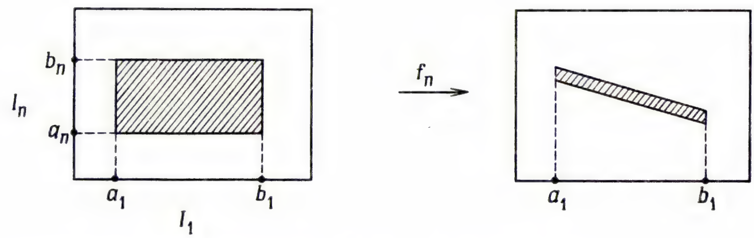
Доказательство. Для каждого i находим отрезок $[a_i, b_i] \subset I_i^0$ так, что

$$A \subset \bar{A} = \prod_{i=1}^{\infty} [a_i, b_i] \subset s.$$

Для $n \geqslant 2$ легко построить такой гомеоморфизм f_n пространства $I_1 \times I_n$ на себя, что

(1) $f_n(q_1, q_n) = (q_1, \bar{q}_n)$, т.е. отображение f_n сохраняет первую координату,

(2) диаметр множества $f_n([a_1, b_1] \times [a_n, b_n]) \cap (I_1 \times \{q_n\})$ меньше $\frac{1}{n}$ при любом $q_n \in I_n$. (Здесь мы отождествляем пространство $I_1 \times I_n$ с подпространством $I_1 \times \{0\} \times \ldots \times \{0\} \times I_n \times \{0\} \times \times \ldots$ пространства Q и рассматриваем его с метрикой пространства Q, описанной в § 2.) На рисунке показано, как кусочно-линейное отображение f_n «вытягивает» прямоугольник $[a_1, b_1] \times [a_n, b_n]$.



Определим отображение g_n: $Q \to Q$ формулой

$$g_n((q_i)) = (q_1, \ldots, q_{n-1}, \bar{q}_n, q_{n+1}, \ldots),$$

где $(q_1, \bar{q}_n) = f_n(q_1, q_n)$. Отметим, что $\lim\limits_{n \to \infty} d(g_n, \mathrm{id}) = 0$ и диаметр множества $g_n(\bar{A}) \cap (I_1 \times \{q\})$ меньше $\frac{1}{n}$ при любом $q \in Q_2$. Применяя критерий сходимости 5.1, мы так выбираем последовательность $n_1 < n_2 < \ldots$, что

$$g = \lim_{i \to \infty} g_{n_i} g_{n_{i-1}} \ldots g_{n_1}$$

есть гомеоморфизм пространства Q на себя. Очевидно, для любой грани W куба Q $g(W) = W$ и множество $g(\bar{A}) \cap (I_1 \times \{q\})$ содержит не более чем одну точку при любом $q \in Q_2$.

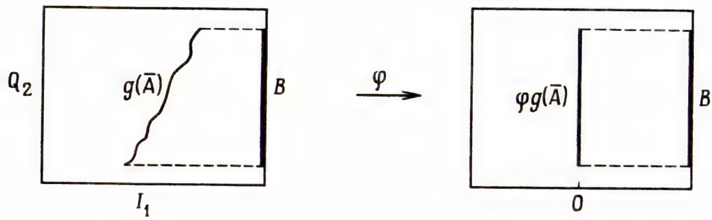
Пусть B есть проекция множества $g(\bar{A})$ на Q_2. Определим отображение α: $B \to I_1^0$ формулой

$$\alpha(q) = p_1(x), \quad \text{где} \quad \{x\} = g(\bar{A}) \cap (I_1 \times \{q\}).$$

Продолжаем отображение α до отображения β: $Q_2 \to I_1^0$. Пусть для $t \in I_1^0$ φ_t: $I_1 \to I_1$ есть единственный кусочно-линейный гомеоморфизм, отображающий линейно отрезок $[-1, t]$ на отрезок $[-1, 0]$ и отрезок $[t, 1]$ на отрезок $[0, 1]$. Зададим гомеоморфизм

$\varphi\colon Q \to Q$, полагая

$$\varphi(q_1, q) = (\varphi_{\beta(q)}(q_1), q), \quad \text{где} \quad (q_1, q) \in I_1 \times Q_2.$$



Теперь $h = \varphi g$ есть гомеоморфизм пространства Q на себя, причем $h(W) = W$ для любой грани W куба Q и, следовательно, отображение h сохраняет псевдограницу. Кроме того, $p_1 h(A) = \{0\}$. ■

6.2. Теорема. *Если компакт A лежит в псевдовнутренности s гильбертова куба Q, то существует такой сохраняющий псевдограницу гомеоморфизм $h\colon Q \to Q$, что $p_i h(A) = \{0\}$ для любого нечетного i.*

Доказательство. Представим натуральный ряд $\{1, 2, \ldots\}$ в виде объединения $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ попарно непересекающихся бесконечных множеств α_n, таких, что $2n - 1 \in \alpha_n$ при любом n. Пусть

$$p_{\alpha_n}\colon Q \to Q_{\alpha_n} = \prod \{I_i \mid i \in \alpha_n\}$$

— проекция и $A_n = p_{\alpha_n}(A)$. По лемме 6.1 существует гомеоморфизм $h_n\colon Q_{\alpha_n} \to Q_{\alpha_n}$, для которого $p_{2n-1} h_n(A_n) = \{0\}$ и который сохраняет псевдограницу гильбертова куба Q_{α_n}. Мы имеем представление $Q = Q_{\alpha_1} \times Q_{\alpha_2} \times \ldots$ и благодаря этому можем определить гомеоморфизм h,

$$h = h_{\alpha_1} \times h_{\alpha_2} \times \ldots,$$

очевидным образом удовлетворяющий нашим условиям. ■

§ 7. Продолжение гомеоморфизмов. Докажем теперь, что всякий гомеоморфизм между лежащими в псевдовнутренности s компактами может быть продолжен до сохраняющего псевдограницу гомеоморфизма пространства Q на себя. Этот результат будет нами использован в § 9 для получения общей теоремы о продолжении гомеоморфизма (содержащей также метрическую оценку этого продолжения).

7.1. Теорема. *Пусть A и B — компакты, лежащие в псевдовнутренности s гильбертова куба Q. Тогда произвольный гомеоморфизм $h\colon A \to B$ продолжается до сохраняющего псевдограницу гомеоморфизма пространства Q на себя.*

Доказательство. Пусть α, $\beta\colon Q \to Q$ — сохраняющие псевдограницу гомеоморфизмы и $p_i\alpha(A) = \{0\}$, если i четно, и $p_i\,\beta(B) = \{0\}$, если i нечетно. Очевидно, достаточно для доказательства нашей теоремы указать продолжение гомеоморфизма

$$\beta h\alpha^{-1}\colon \alpha(A) \to \beta(B)$$

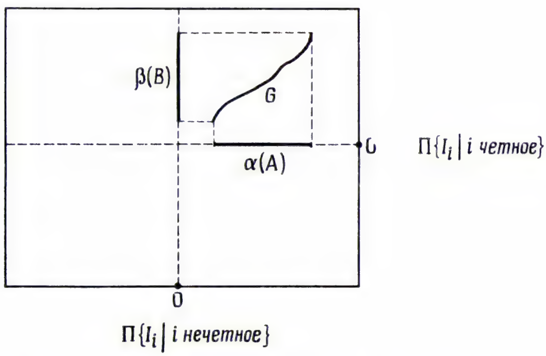
до сохраняющего псевдограницу гомеоморфизма куба Q на себя.

Пусть $G \subset Q$ — *график* отображения $\beta h\alpha^{-1}$. Это есть как раз множество тех точек $(q_i) \in Q$, для которых

(1) $(q_1, 0, q_3, 0, \ldots) \in \alpha(A)$,

(2) $\beta h\alpha^{-1}(q_1, 0, q_3, 0, \ldots) = (0, q_2, 0, q_4, \ldots)$.

Нам поможет рисунок.



Как при построении отображения φ в доказательстве леммы 6.1, мы можем найти сохраняющий псевдограницу гомеоморфизм $f\colon Q \to Q$, который переводит произвольную точку $(q_1, 0, q_3, 0, \ldots)$ множества $\alpha(A)$ в единственную точку вида $(q_1, q_2, q_3, q_4, \ldots)$ множества G. На рисунке этот гомеоморфизм сдвигает множество $\alpha(A)$ вертикально на график G. Аналогично строится сохраняющий псевдограницу гомеоморфизм $g\colon Q \to Q$, который сдвигает горизонтально множество $\beta(B)$ на график G. Нам осталось взять в качестве искомого продолжения отображения $\beta h\alpha^{-1}$ гомеоморфизм $g^{-1}f$. ■

§ 8. Аппроксимация отображений вложениями. Хорошо известно, что всякое отображение n-мерного пространства в

$(2n+1)$-мерный куб I^{2n+1} может быть аппроксимировано вложениями. Сейчас установим бесконечномерный аналог этого результата для псевдовнутренности гильбертова куба.

8.1. Теорема. *Пусть (A, A_0) — компактная пара и $f: A \to s$ — отображение, ограничение $f|_{A_0}$ которого на подпространство A_0 является вложением. Тогда существует вложение $g: A \to s$, совпадающее на множестве A_0 с отображением f. Более того, вложение g может быть выбрано сколь угодно близким к отображению f.*

Доказательство. Пусть $\alpha: Q \to Q$ есть сохраняющий псевдограницу гомеоморфизм и $p_i \alpha f(A) = \{0\}$ при i четном, пусть A/A_0 — факторпространство, получаемое из пространства A отождествлением множества A_0 в точку, $q: A \to A/A_0$ — соответствующее факторотображение. Существует вложение $e: A/A_0 \to I_2^0 \times I_4^0 \times \ldots$, такое, что $eq(A_0) = \{0\}$. Зададим отображение $\bar{g}: A \to s$, полагая $\bar{g}(x) = (q_i)$, где

$$(q_1, 0, q_3, 0, \ldots) = \alpha f(x),$$
$$(q_2, q_4, \ldots) = eq(x).$$

Отметим, что $g = \alpha^{-1}\bar{g}: A \to s$ есть вложение, удовлетворяющее поставленным условиям: $g|_{A_0} = f|_{A_0}$. Если отображение e выбирать достаточно близким к отображению пространства A/A_0 в точку $\{0\} \in I_2^0 \times I_4^0 \times \ldots$, расстояние $d(f, g)$ можно сделать сколь угодно малым.

§ 9. Точное продолжение гомеоморфизмов. В теореме 7.1 мы доказали, что гомеоморфизм между компактами, лежащими в псевдовнутренности s, может быть продолжен до гомеоморфизма всего пространства Q на себя. В теореме 9.1 мы дополним это, показав, что если первоначальный гомеоморфизм сдвигает точки на малое расстояние, то можно указать продолжение, также обладающее этим свойством. Техника доказательства теоремы 9.1 будет затем снова использована нами в 17.1.

9.1. Теорема. *Пусть A компакт и $f, g: A \to s$ — вложения этого компакта в псевдовнутренность s гильбертова куба Q, $\varepsilon > 0$ и $d(f, g) < \varepsilon$. Тогда существует сохраняющий псевдограницу гомеоморфизм $h: Q \to Q$, для которого $hf = g$, $d(h, \mathrm{id}) < \varepsilon$.*

Доказательство. Для произвольного $\delta > 0$, опираясь на лемму 6.1, можно указать сохраняющий псевдограницу гомеомор-

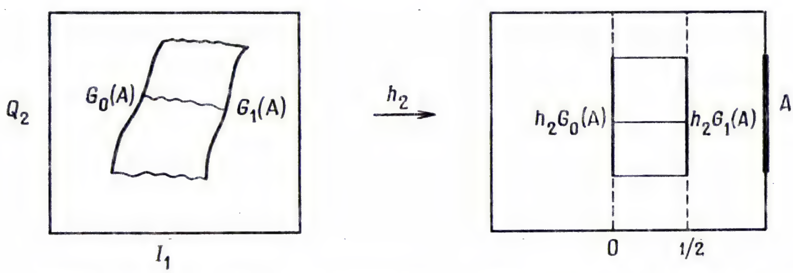
физм $h_1\colon Q\to Q$, для которого $h_1g(A)\cap f(A)=\varnothing$ и $d(h_1, \mathrm{id})<\delta$. (Позже мы укажем, как выбрать δ.) Для этого, предполагая, что $f(A)\cup g(A)\subset\{0\}\times Q_2$, а это возможно по лемме 6.1, возьмем в качестве гомеоморфизма h_1 достаточно малый сдвиг по первой координате.

Выберем $\varepsilon_1>0$ так, чтобы $d(f, g)<\varepsilon_1<\varepsilon$, и заметим, что

$$d(f, h_1g)<\varepsilon_1+\delta.$$

Пусть $F\colon A\times I\to s$ — прямолинейная гомотопия, соединяющая отображения $F_0=f$ и $F_1=h_1g$. При этом длина каждого отрезка $F(\{a\}\times I)$, $a\in A$, меньше $\varepsilon_1+\delta$. По теореме 8.1 существует вложение $G\colon A\times I$, для которого $G_0=F_0=f$, $G_1=F_1=h_1g$, и диаметр каждого множества $G(\{a\}\times I)$ меньше $\varepsilon_1+\delta$.

Не уменьшая общности, мы можем дополнительно предположить, что $A\subset I_2^0\times I_3^0\times\ldots$. По теореме 7.1 мы можем указать сохраняющий псевдограницу гомеоморфизм $h_2\colon Q\to Q$, переводящий множество $G(A\times I)$ на множество $[0, 1/2]\times A\subset I_1\times\times Q_2$, для которого $h_2G(a, t)=(t/2, a)$ для $(a, t)\in A\times I$. Гомеоморфизм h_2 передвигает криволинейный отрезок $G(\{a\}\times I)$ в прямолинейный отрезок $[0, 1/2]\times\{a\}$, как показано на рисунке.



Пусть $n\subset Q_2$ есть окрестность множества A и $\theta\in(0, 1/2)$. Среди сдвигов по первой координате легко выбрать сохраняющий псевдограницу гомеоморфизм $h_3\colon Q\to Q$, совпадающий с id вне $(-\theta, 1/2+\theta)\times N$ и $h_3(0, a)=(1/2, a)$ для $a\in A$. Тогда $h=h_1^{-1}\,h_2^{-1}\,h_3\,h_2$ есть сохраняющий псевдограницу гомеоморфизм, удовлетворяющий условию $hf=g$. Как легко видеть, если выбрать окрестность N множества A и число $\theta>0$ достаточно малыми, то можно добиться выполнения неравенства $d(h, \mathrm{id})<\varepsilon_1+2\delta$. При малом δ будем иметь $d(h, \mathrm{id})<\varepsilon$. ■

§ 10. Вложения Z-множеств в псевдовнутренность s. Наша стратегия в изучении Z-множеств гильбертова куба Q заключается в сведении проблемы к компактам, лежащим в псевдовнутренности s и последующем применении теорем 8.1 и 9.1. Такая

редукция станет возможной, как только мы докажем теорему 10.2 этого параграфа, утверждающую, что всякое Z-множество пространства Q можно гомеоморфизмом пространства Q перевести в псевдовнутренность s. Начнем со следующего полезного утверждения.

10.1. Лемма. *Если W есть некоторая грань гильбертова куба Q и $\varepsilon > 0$, то существует такой гомеоморфизм $h\colon Q \to Q$, что $h(W) \subset s$ и $d(h, \mathrm{id}) < \varepsilon$.*

Доказательство. Без ущерба для общности предположим дополнительно, что

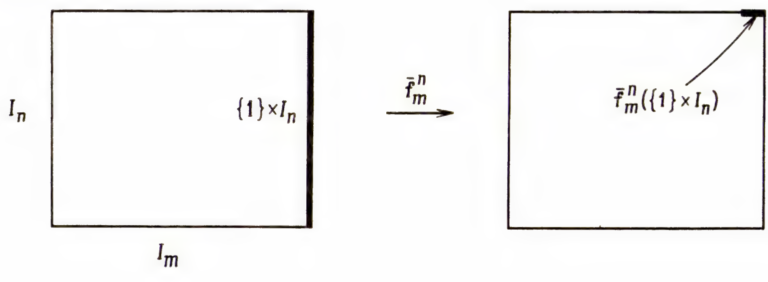
$$W = \{(q_i) \in Q \mid q_1 = 1\}.$$

Для любых $n > m > 0$ существует гомеоморфизм $\bar{f}^n_m$ пространства $I_m \times I_n$ на себя, для которого

$$\bar{f}^n_m(\{1\} \times I_n) \subset I_m \times \{1\},$$

$$d(\bar{f}^n_m, \mathrm{id}) < 3/2^n.$$

Как и в доказательстве леммы 6.1, рассматриваем пространство $I_m \times I_n$ с метрикой, индуцированной стандартным вложением этого пространства в пространство Q. Пример такого отображения показан на рисунке.



Заштрихованная область остается неподвижной.

Сжимая $(n-1)$-мерную клетку I^{n-1} в ее внутренность, мы можем построить такой гомеоморфизм $\bar{g}_n\colon I^n \to I^n$, что

$$g_n(I^{n-1} \times \{1\}) \subset \mathrm{Int}\,(I^{n-1}) \times \{1\},$$

$$d(\bar{g}_n, \mathrm{id}) < \frac{1}{n}\cdot$$

Теперь определим отображения $f_m^n: Q \to Q$ и $g_n: Q \to Q$, умножая отображения $\bar{f}_m^n$ и $\bar{g}_n$ каждое на тождественное отображение. Тогда отображение $g_n f_m^n: Q \to Q$ является гомеоморфизмом, причем

$$g_n f_m^n(I^{m-1} \times \{1\} \times Q_{m+1}) \subset \operatorname{Int}(I^{n-1}) \times \{1\} \times Q_{n+1},$$

$$d(g_n f_m^n, \mathrm{id}) < 3/2^n + 1/n.$$

Построим последовательность $1 = n_1 < n_2 < \ldots$ так, чтобы $3/2^{n_k+1} + 1/n_{k+1} < \dfrac{1}{2^{k+1}} \cdot \min\{\delta_{n_2}, \ldots, \delta_{n_k}, \dfrac{\varepsilon}{2}\}$, где $\delta_{n_i} = d(g_{n_i} f_{n_{i-1}}^{n_i}(I^{n_i-1} \times \{1\} \times Q_{n_{i-1}+1}), ((I^{n_i-1} \setminus \operatorname{Int}(I^{n_i-1})) \times \{1\} \times Q_{n_{i-1}+1})$.

По критерию сходимости 5.1 мы можем выбрать подпоследовательность $1 = n_{k(1)} < n_{k(2)} < \ldots$, для которой $h = \lim\limits_{i\to\infty} g_{n_{k(i+1)}} f_{n_{k(i)}}^{n_{k(i+1)}} \ldots g_{n_{k(2)}} f_1^{n_{k(2)}}$ есть гомеоморфизм пространства Q на себя. На $(i+1)$-м шаге множество $g_{n_{k(i+1)}} f_{n_{k(i)}}^{n_{k(i+1)}} \ldots g_{n_{k(2)}} f_1^{n_{k(2)}}(w)$, будучи подмножеством множества $g_{n_{k(i+1)}} f_{n_{k(i)}}^{n_{k(i+1)}} (I^{n_{k(i)}} \times \{1\} \times Q_{n_{k(i)}+1})$, лежит в множестве $\operatorname{Int}(I^{n_{k(i+1)}-1}) \times \{1\} \times Q_{n_{k(i+1)}+1}$ вместе со своей $\delta_{n_{k(i+1)}}$-окрестностью. Отсюда в соответствии с выбором последовательности (n_k) следует, что первые $n_{k(i+1)}$ координат лежат между -1 и $+1$. А так как это справедливо при любом $i = 1, 2, \ldots$, то $h(W) \subset S$. Тот же выбор последовательности (n_k) гарантирует выполнение неравенства $d(h, \mathrm{id}) < \varepsilon$. ■

10.2. Теорема. *Пусть $A \subset Q$ есть Z-множество, $\varepsilon > 0$. Существует гомеоморфизм $h: Q \to Q$, для которого $h(A) \subset s$ и $d(h, \mathrm{id}) < \varepsilon$.*

Доказательство. Пусть $\{W_i\}_{i=1}^{\infty}$ — семейство всех граней куба Q. По лемме 10.1 существует гомеоморфизм $f_1: Q \to Q$, для которого $f_1(W_1) \subset s$. Так как A есть Z-множество, найдется сколь угодно близкое к тождественному отображение $\alpha_1: f_1(W) \to Q \setminus A$. Очевидно, для любого $\delta > 0$ существует вложение $\beta_1: Q \to s$, для которого $d(\beta_1, \mathrm{id}) < \delta$. Выбирая δ достаточно малым, можем добиться выполнения условия $\beta_1 \alpha_1 f_1(W_1) \cap A = \varnothing$. По теореме 8.1 отображение $\beta_1 \alpha_1$ может быть аппроксимировано вложением $\gamma_1: f_1(W_1) \to s \setminus A$. Пусть $g_1: Q \to Q$ — гомеоморфизм, продолжающий вложение γ_1. Тогда $g_1 f_1(W_1) \cap A = \varnothing$ и отображение $h_1 = (g_1 f_1)^{-1}$ есть гомеоморфизм, для которого $h_1(A) \cap W_1 = \varnothing$. Наши построения легко уточнить и добиться

выполнения неравенства $d(h_1, \mathrm{id}) < \varepsilon_1$ для любого наперед заданного $\varepsilon_1 > 0$.

Заметим теперь, что $h_1(A)$ есть Z-множество пространства Q. Так же как на первом шаге, строим гомеоморфизм $h_2\colon Q \to Q$, для которого $h_2 h_1(A) \cap W_2 = \varnothing$ и $d(h_2, \mathrm{id}) < \varepsilon_2$ для некоторого наперед заданного $\varepsilon_2 > 0$; выберем h_2 настолько близким к id, чтобы выполнялось $h_2 h_1(A) \cap W_1 = \varnothing$ и т.д. Числа ε_n выбираем удовлетворяющими условиям $\varepsilon_n < \dfrac{1}{2^n}$, $\varepsilon_n < \dfrac{1}{2^n} \cdot \min\{d(h_k \ldots h_1(A), W_i) \mid 1 \leqslant i \leqslant k < n\}$.

Отображение $h = \lim\limits_{n \to \infty} h_n \ldots h_1$ есть гомеоморфизм пространства Q на себя, удовлетворяющий нашим условиям (см. доказательство теоремы 5.1, компактный случай). ■

§ 11. Основные результаты. Применим теперь теорему 10.2, чтобы получить основные результаты.

11.1. Теорема. *Если A, B есть Z-множества пространства Q, а $h\colon A \to B$ — гомеоморфизм, то существует гомеоморфизм $\tilde{h}\colon Q \to Q$, продолжающий гомеоморфизм h. Более того, если $d(h, \mathrm{id}) < \varepsilon$, то гомеоморфизм $\tilde{h}$ может быть выбран так, что $d(\tilde{h}, \mathrm{id}) < \varepsilon$.*

Доказательство. Применяем 9.1 и 10.2.

11. 2. Теорема. *Пусть $(A, A_0$ — компактная пара, $f\colon A \to Q$ — отображение, ограничение $f|_{A_0}$ которого на множество A_0 есть Z-вложение. Существует Z-вложение $g\colon A \to Q$, совпадающее с отображением f на множестве A_0. Отображение g может быть построено сколь угодно близким к отображению f.*

Доказательство. Применяем 8.1 и 10.2. ■

§ 12. Некоторые приложения. Воспользуемся теперь теоремой 11.1, чтобы доказать, что пространство Q локально гомеоморфно произведению $Q \times [0, 1)$ и гомеоморфно своему конусу. (Напомним, что конусом компактного метрического пространства X является одноточечная компактификация произведения $X \times [0, 1)$.)

12.1. Теорема. *Пространство Q локально гомеоморфно произведению $Q \times [0, 1)$.*

Доказательство. Пусть $p \in U \subset Q$ и множество U открыто в пространстве Q. Мы должны указать открытое множество G,

гомеоморфное произведению $Q\times[0, 1)$, такое, что $p\in G\subset U$. Очевидно, существуют натуральное число n и открытое множество $V\subset I^n$, для которых

$$p\in V\times Q_{n+1}\subset U.$$

Это сразу следует из определения топологии произведения. Пусть $p=(x, y)$, где $x\in V$ и $y\in Q_{n+1}$. Если $x\in \operatorname{Bd}(I^n)$, то мы можем найти такое открытое множество $\overline{G}\subset I^n$, что $\overline{G}\subset V$ и $\overline{G}\cong I^{n-1}\times[0, 1)$. Тогда окрестность $G=\overline{G}\times Q_{n+1}$ удовлетюряет поставленным условиям.

Разобранный случай является на самом деле общим, так как из теоремы 11.1 следует, что мы можем предполагать $p=(1, 0, 0, \ldots)$[1)] и тем более $p\in\operatorname{Bd}(I^n)\times Q_{n+1}$. ■

12.2. Теорема. *Пространство Q гомеоморфно конусу над Q.*

Доказательство. Возьмем произвольно $p\in Q$. Пусть $W=\{(q_i)\in Q\mid q_1=1\}$. Мы уже отмечали, что конус над пространством Q гомеоморфен одноточечной компактификации пространства $Q\times[0, 1)$, и поэтому нам достаточно доказать, что

$$Q\setminus W\cong Q\setminus\{p\}$$

(так как, очевидно, $Q\setminus W=[-1, +1)\times Q_2\cong[0, 1)\times Q$).

По теореме 12.1 существует последовательность $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$ открытых вложений, $\varphi_i\colon Q\times[0, 1)\to Q$, для которых

(1) $\varphi_{i+1}(Q\times[0, 1))\subset\varphi_i(Q\times[0, 1/2))$,

(2) $\{p\}=\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}\varphi_i(Q\times[0, 1))$.

Легко указать гомеоморфизм между пространствами $Q\times[0, 1)$ и $Q\times[1/2, 1)$, совпадающий с тождественным отображением на пространстве $Q\times[2/3, 1)$. Отсюда следует, что подпространство

$$\varphi_i(Q\times[0, 1/2])\setminus\varphi_{i+1}(Q\times[0, 1/2))$$

гомеоморфно гильбертову кубу при любом $i>0$. Аналогично, пространство

$$Q\setminus\varphi_1(Q\times[0, 1/2))$$

также гомеоморфно гильбертову кубу.

---

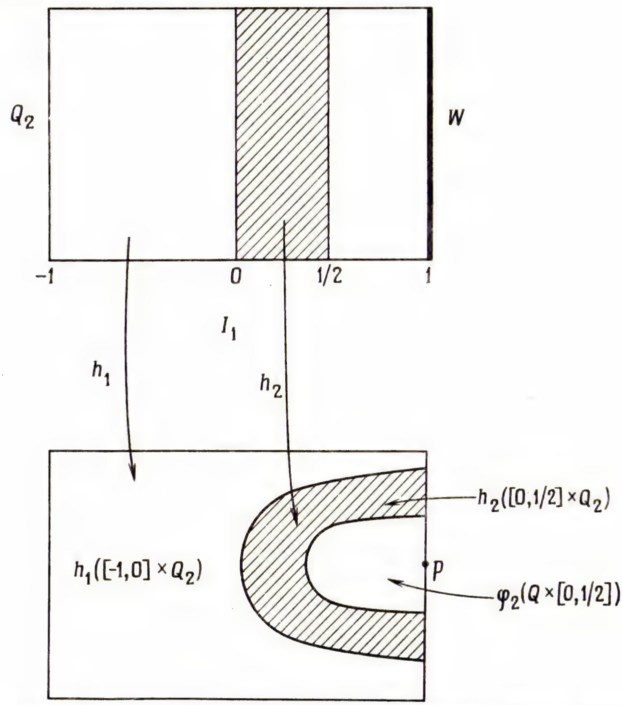
1) Автор не отмечает, что из теоремы 11.1 следует топологическая однородность гильбертова куба. — *Прим. перев.*

Пусть $h_1\colon [-1, 0]\times Q_2 \to Q\setminus\varphi_1(Q\times[0, 1/2))$ — гомеоморфизм. По теореме 11.1 мы можем считать, что гомеоморфизм h_1 отображает множество $\{0\}\times Q_2$ на множество $\varphi_1(Q\times\{1/2\})$. Пусть $h_2\colon [0, 1/2]\times Q_2\to\varphi_1(Q\times[0, 1/2])\setminus\varphi_2(Q\times[0, 1/2))$ — гомеоморфизм, на который по теореме 11.1 налагаем дополнительные условия

$$h_2|_{\{0\}\times Q_2} = h_1|_{\{0\}\times Q_2},$$

$$h_2(\{1/2\}\times Q_2) = \varphi_2(Q\times\{1/2\}).$$

См. рисунок.



Продолжая этот процесс, получим гомеоморфизм пространства $Q\setminus W$ на пространство $Q\setminus\{p\}$. ■

Замечания

§ 6. Доказательства в 6.1 и 6.2 взяты в основном у Андерсона [1, § 3]. Намного более сильные результаты могут быть получены при одновременном изучении топологии пространств s и Q.

§ 7. 7.1 есть теорема 4.2 Андерсона [1]. Ее доказательство использует знаменитый прием Кли продолжения гомеоморфизмов.

§ 9. Первый результат о точном продолжении гомеоморфизмов принадлежит Бариту [6]. Доказательство, данное нами в 9.1, несколько отличается от подхода Барита. Идея нашего доказательства содержится в статье Андерсона и Мак-Чарена [4].

§ 10. Теорема 10.2 есть ключевой результат, сводящий изучение Z-множеств к теории компактов, лежащих в псевдовнутренности s. Это установлено Андерсоном [2, § 8], но наше доказательство несколько отличается от оригинального. Оно более в духе работы Чепмэна [10].

§ 11. Основной результат (без метрических условий) принадлежит Андерсону [2].

III. СТАБИЛЬНОСТЬ Q-МНОГООБРАЗИЙ

Q-многообразием называется сепарабельное метрическое пространство, локально гомеоморфное гильбертову кубу Q (т.е. для любой точки этого пространства можно указать окрестность, гомеоморфную открытому подмножеству гильбертова куба). По теореме 12.1 это означает, что для любой точки пространства можно указать сколь угодно мелкую окрестность, гомеоморфную произведению $Q \times [0, 1)$. Простейшими примерами Q-многообразий являются (1) открытые подпространства гильбертова куба Q и (2) произведение $M^n \times Q$ конечномерного топологического многообразия M^n на куб Q.

В этой главе мы начинаем изучение Q-многообразий. Наш основной результат, теорема 15.1, утверждает, что всякое Q-многообразие *стабильно,* т.е. гомеоморфно своему произведению на пространство Q. На пути к этому мы установим сначала стабильность открытых подпространств гильбертова куба Q и затем воспользуемся этим для изучения произвольного Q-многообразия.

§ 13. Открытые подпространства гильбертова куба. В этом параграфе мы докажем стабильность открытых подпространств гильбертова куба Q. Основная техническая идея заключена в следующем приеме замены координат.

13.1. Лемма. *Существует такое отображение $h: Q \times Q \times [1, \infty) \to Q$, что для отображения $h_t: Q \times Q \to Q$, заданного формулой $h_t(q, r) = h(q, r, t)$, выполнено*

(1) *при любом $t \geqslant 1$ отображение h_t является гомеоморфизмом,*

(2) *если $n \leqslant t$ — целое число, то*

$$h_t((q_i), r) = (q_1, q_2, \ldots, q_n, q'_{n+1}, q'_{n+2}, \ldots)$$

(*т.е. отображение h_t сохраняет первые n координат первого сомножителя произведения $Q \times Q$*).

Доказательство. Пусть $\bar{\theta}_t: I_1 \times I_2 \to I_1 \times I_2$ — изотопия, $0 \leqslant t \leqslant 1$, и $\bar{\theta}_0 = \mathrm{id}$, $\bar{\theta}_1(q_1, q_2) = (-q_2, q_1)$, т.е. отображение $\bar{\theta}_1$ осу-

ществляет поворот на угол 90°. Определим изотопию $\theta_t: Q \to Q$ формулой

$$\theta_t = \overline{\theta}_t \times \mathrm{id}: (I_1 \times I_2) \times Q_3 \to (I_1 \times I_2) \times Q_3.$$

Отметим, что $\theta_0 = \mathrm{id}$ и $\theta_1(q_1, q_2, q_3, \ldots) = (-q_2, q_1, q_3, \ldots)$. Искомое отображение h зададим, положив прежде всего

$$h_1((q_i), (r_i)) = (q_1, r_1, -q_2, r_2, q_3, r_3, -q_4, r_4, \ldots),$$

где в правой части знаки при q_i чередуются. Зададим отображения h_t, $1 \leqslant t \leqslant 2$, полагая, что совершаем изотопию типа изотопии θ_t, имея

$$h_2((q_i), (r_i)) = (q_1, q_2, r_1, r_2, q_3, r_3, -q_4, r_4, \ldots).$$

Теперь зададим отображения h_t, $2 \leqslant t \leqslant 3$, совершая дважды изотопию типа изотопии θ_t[1], имея

$$h_3((q_i), (r_i)) = (q_1, q_2, q_3, r_1, r_2, r_3, -q_4, r_4, \ldots).$$

Очевидно, продолжая задавать отображения h_t, $n \leqslant t \leqslant n+1$, получим требуемое отображение h. ■

13.2. Теорема. *Пусть G есть открытое подпространство пространства Q. Тогда $G \times Q \cong G$.*

Доказательство. Предположим, что $G \neq Q$ (случай $G = Q$ тривиален). Если $C \subset G$ — компакт, найдутся натуральное число k и компакт $D \subset I^k$, такие, что $C \subset D \times Q_{k+1}$. Это сразу следует из определений. Учитывая это, можем представить подпространство $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ в виде объединения таких его компактных подпространств A_n, что $A_n \subset \mathrm{Int}(A_{n+1})$, $A_n = B_n \times Q_{k_n+1}$, где $B_n \subset I^{k_n}$ и $k_1 < k_2 < \ldots$. Теперь не составляет труда указать такую функцию $\varphi: G \to [1, \infty)$, что для $(q_i) \in G$ и $m = \min\{k_n \mid (q_i) \in A_n\}$

(1) $\varphi((q_i)) \geqslant m$,

(2) $\varphi((q_i)) = \varphi(q_1, q_2, \ldots q_m, q'_{m+1}, q'_{m+2}, \ldots)$

для любой точки $(q'_{m+1}, q'_{m+2}, \ldots) \in Q_{m+1}$. (Отметим, что из (1) следует, что

$$(q_1, q_2, \ldots, q_m, q'_{m+1}, q'_{m+2}, \ldots) \in G.)$$

Как строится функция φ, покажем на примере первого шага ее построения.

---

[1] В конце первой изотопии должны получить

$$h_{2\frac{1}{2}}((q_i), (r_i)) = (q_1, q_2, r_1, -q_3, r_2, r_3, -q_4, r_4, \ldots),$$

— *Прим. перев.*

Пусть $\varphi(A_1) = k_2$,

$$\bar{\varphi}\colon B_2 \setminus \mathrm{Int}\,(B_1 \times I_{k_1+1} \times \ldots \times I_{k_2}) \to [k_2, k_3]$$

— отображение, при котором

$$\bar{\varphi}\,(\mathrm{Bd}\,(B_1 \times I_{k+1} \times \ldots \times I_{k_2})) = k_2,$$

$$\bar{\varphi}(\mathrm{Bd}\,(B_2)) = k_3.$$

Зададим φ на $A_2 \setminus \mathrm{Int}\,(A_1)$ формулой

$$\varphi((q_i)) = \bar{\varphi}(q_1, q_2, \ldots, q_{k_2}).$$

Пусть $h\colon Q \times Q \times [1, \infty) \to Q$ — отображение, построенное нами в лемме 13.1, и $f\colon G \times Q \to Q$ — отображение, задаваемое формулой

$$f\,(q, r) = h(q, r, \varphi(q)).$$

Оставляем читателю в качестве упражнения проверку того, что f гомеоморфно отображает пространство $G \times Q$ на подпространство $G \subset Q$. ■

13.3. Следствие. *Построенный выше гомеоморфизм удовлетворяет условию: для любого натурального числа n найдется компакт $A \subset G$, для которого*

$$f((q_i), r) = (q_1, \ldots, q_n, q'_{n+1}, \ldots)$$

при $((q_i), r) \in (G \setminus A) \times Q$.

§ 14. Произведения с переменным слоем. В этой части мы используем замечание 13.3 для доказательства теоремы 14.2, содержащей результат, используемый при доказательстве стабильности Q-многообразий. Следующее понятие будет нам полезно. Пусть X есть топологическое пространство и $r\colon X \to I$ — отображение. Тогда подпространство произведения

$$X \times_r Q = \cup \{\{x\} \times \prod_{i=1}^{\infty} [-r(x), r\,(x)] \mid x \in X\} \subset X \times Q$$

называется произведением с переменным слоем. Если $A \subset X$, то пространство $A \times_r Q = (A \times Q) \cap (X \times_r Q)$ называется ограничением произведения с переменным слоем $X \times_r Q$ на множество A.

14.1. Лемма. *Произведение с переменным слоем $Q \times_r Q$ гомеоморфно пространству Q. Более того, соответствующий гомеоморфизм произведения $Q \times_r Q$ может быть взят сколь угодно близким к проектированию на первый сомножитель.*

Доказательство. Предполагая, что $r \not\equiv 0$ (случай $r \equiv 0$ тривиален), рассмотрим множество $G = r^{-1}((0, 1])$ и гомеоморфизм $f: G \times_r Q \to G$ из замечания 13.3. Отображение f очевидным образом порождает гомеоморфизм подпространства $G \times_r Q \subset Q \times_r Q$ на подпространство $G \subset Q$, продолжаемый на все произведение $Q \times_r Q$ проектированием $(Q \setminus G) \times_r Q$ на первый сомножитель до гомеоморфизма $\tilde{f}: Q \times_r Q \to Q$. Если указанную в доказательстве теоремы 13.2 функцию φ подправить, положив $\varphi(A_{n_0 - 1}) \equiv n_0$, будем иметь

$$\tilde{f}((q_i), (r_i)) = (q_1, \ldots, q_{n_0}, q'_{n_0+1}, \ldots)$$

в любой точке $((q_i), (r_i)) \in Q \times_r Q$. Поэтому отображение $\tilde{f}$ может быть выбрано сколь угодно близким к проектированию на первый сомножитель. ■

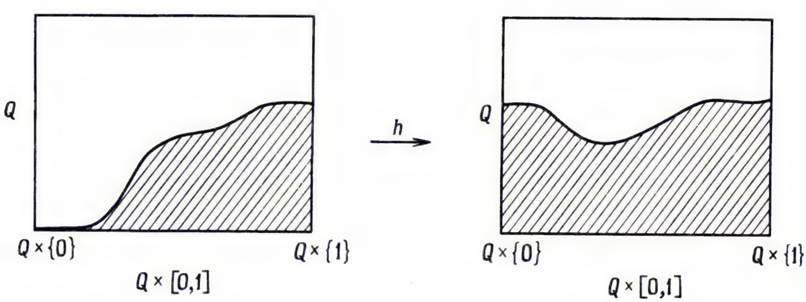
14.2. Теорема. *Пусть* $(Q \times [0, 1]) \times_r Q$ *и* $(Q \times [0, 1]) \times_s Q$ — *произведения с переменным слоем,* $r|_{Q \times \{1\}} = s|_{Q \times \{1\}}$. *Тогда существует гомеоморфизм*

$$h: (Q[0, 1]) \times_r Q \to (Q \times [0, 1]) \times_s Q,$$

совпадающий с тождественным отображением на подпространстве $(Q \times \{1\}) \times_r Q - (Q \times \{1\}) \times_s Q$. *Более того, если*

$$p: (Q \times [0, 1]) \times Q \to Q \times [0, 1]$$

— *проектирование, то отображение* h *может быть выбрано так, что композиция* ph *будет сколь угодно близкой к* $p|_{(Q \times [0, 1]) \times_r Q}$.



$(Q \times [0, 1]) \times_r Q$ — область под графиком

$(Q \times [0, 1]) \times_s Q$ — область под графиком

Доказательство. По лемме 14.1 все следующие произведения с переменным слоем гомеоморфны гильбертову кубу:

$$(Q \times [0, 1]) \times_r Q,$$
$$(Q \times [0, 1]) \times_s Q,$$
$$(Q \times \{1\}) \times_r Q,$$
$$(Q \times \{1\}) \times_s Q.$$

Более того, легко показать, что $(Q \times \{1\}) \times_r Q$ есть Z-множество пространства $(Q \times [0, 1]) \times_r Q$ и $(Q \times \{1\} \times_r Q$ есть Z-множество пространства $(Q \times [0, 1]) \times_s Q$.

Если d есть метрика на произведении $Q \times [0, 1]$ и $\varepsilon > 0$, то из леммы 14.1 следует, что существуют такие гомеоморфизмы

$$f\colon (Q \times [0, 1]) \times_r Q \to Q \times [0, 1],$$
$$g\colon (Q \times [0, 1]) \times_s Q \to Q \times [0, 1],$$

что

$$d(f, p|_{(Q \times [0, 1]) \times_r Q}) < \varepsilon,$$
$$d(g, p|_{(Q \times [0, 1]) \times_s Q}) < \varepsilon.$$

По теореме 11.1 о продолжении гомеоморфизмов существует такой гомеоморфизм

$$\tilde{h}\colon Q \times [0, 1] \to Q \times [0, 1],$$

что $\tilde{h}f = g$ на подпространстве $(Q \times \{1\}) \times_r Q$ и $d(\tilde{h}, \mathrm{id}) < 2\varepsilon$. (Метрику d мы можем выбрать так, что она совпадает со стандартной метрикой на подпространстве $Q \times [0, 1]$.) Отображение $h = g^{-1}\tilde{h}f$ удовлетворяет условиям. ■

§ 15. Основной результат. Теперь мы докажем стабильность Q-многообразий. При этом мы будем проводить локальные рассмотрения и опираться на теоремы 12.1 и 14.2.

15.1. Теорема. *Пусть M есть Q-многообразие. Тогда $M \times Q \cong M$. Более того, отображение проектирования произведения MQ на первый сомножитель является почти гомеоморфизмом*[1].

---

[1] См. § 1. — *Прим. перев.*

Доказательство. Пусть $A \subset U \subset M$ и множество A компактно, множество U открыто в пространстве M. Пусть отображения $r, s\colon M \to I$ совпадают на подпространстве $M \setminus A$. Докажем сначала, что существует гомеоморфизм h пространства $M \times_r Q$ на пространство $M \times_s Q$, совпадающий с тождественным отображением на пространстве $(M \setminus U) \times_r Q$. Более того, если $p\colon M \times Q \to M$ — проектирование на первый сомножитель, то гомеоморфизмы h могут быть выбраны так, что отображение ph будет сколь угодно близко к проектированию $p|_{M \times_r Q}$. Читатель должен обратить внимание, что мы хотим обобщить теорему 14.2. Отсюда мы получим основной результат, $M \times Q \cong M$, в качестве следствия.

По теореме 12.1 мы можем указать конечное число открытых вложений

$$\varphi_i\colon Q \times [0, 2] \to U, \quad 1 \leqslant i \leqslant n,$$

таких, что семейство $\{\varphi_i(Q \times [0, 1/2])\}_{i=1}^{n}$ покрывает множество A. Пусть $r_1\colon M \to I$ — функция, заключенная между функциями r и s (т.е. при любом $m \in M$ $r_1(m)$ лежит между $r(m)$ и $s(m)$), совпадающая с функцией s на множестве $\varphi_1(Q \times [0, 1/2])$ и с функцией r на дополнении к множеству $\varphi_1(Q \times [0, 1))$. (Чтобы построить такое отображение, возьмем функцию $u\colon M \to [0, 1]$, равную нулю на множестве $\varphi_1(Q \times [0, 1/2])$ и единице на дополнении к множеству $\varphi_1(Q \times [0, 1))$. Положим $r_1(m) = u(m)r(m) + (1 - u(m))s(m)$.) По теореме 14.2 существует гомеоморфизм h_1 пространства $M \times_r Q$ на пространство $M \times_{r_1} Q$, совпадающий с тождественным отображением на множестве $[M \setminus \varphi_1(Q \times [0, 1))] \times_r Q$ и тем более на множестве $(M \setminus U) \times_r Q$.

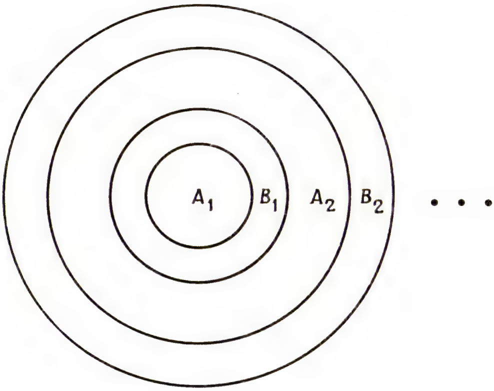
Рассмотрим теперь функцию $r_2\colon M \to I$, заключенную между функциями r_1 и s (строится аналогично функции r_1), совпадающую с функцией s на множестве $\varphi_2(Q \times [0, 1/2])$ и с функцией r_1 на множестве $M \setminus \varphi_2(Q \times [0, 1))$. Так как функция r_2 заключена между функциями r_1 и s, мы имеем также, что $r_2 = s$ на множестве $\varphi_1(Q \times [0, 1/2])$. Существует гомеоморфизм h_2 пространства $M \times_{r_1} Q$ на пространство $M \times_{r_2} Q$, совпадающий с тождественным отображением на множестве $(M \setminus U) \times_{r_1} Q$. Продолжая таким образом, построим гомеоморфизмы $h_1, h_2, \ldots, h_n$, композиция $h = h_n h_{n-1} \ldots h_2 h_1$ которых будет удовлетворять нашим требованиям. Так как мы делаем при этом лишь конечное число шагов, нетрудно добиться, чтобы отображение ph было сколь угодно близким к проекции $p|_{M \times_r Q}$.

Чтобы рассмотреть общий случай, представим Q-многообразие M в виде объединения $M = \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$ возрастающей последова-

тельности компактов, $C_i \subset \operatorname{Int}(C_{i+1})$. Пусть

$$A_1 = C_1, \qquad B_1 = C_2 \setminus \operatorname{Int}(C_1),$$
$$A_2 = C_3 \setminus \operatorname{Int}(C_2), \qquad B_2 = C_4 \setminus \operatorname{Int}(C_3),$$
$$A_3 = C_5 \setminus \operatorname{Int}(C_4), \qquad B_3 = C_6 \setminus \operatorname{Int}(C_5),$$
$$\ldots .$$

На рисунке A_i — нечетные, B_i — четные кольца.



Пусть $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, $B = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$.

Применяя высказанные в начале замечания к каждому из множеств A_i в отдельности, строим гомеоморфизм $f\colon M \times Q \to M \times_r Q$, где r — функция, тождественно равная нулю на множестве A и отличная от нуля вне этого множества. Отображение f может быть выбрано так, что композиция pg будет сколь угодно близка к проектированию p. Теперь, применяя те же замечания к каждому из множеств B_i в отдельности, строим гомеоморфизм $g\colon M \times_r Q \to M \times \{0\}$ так, чтобы композиция pg была близка к проектированию $p|_{M \times_r Q}$. Гомеоморфизм pg: $M \times Q \to M \times \{0\}$ удовлетворяет поставленным условиям. ■

Замечания

§ 13. Прием перестановки координат, использованный в 13.1, полезен при доказательстве существования изотопии $f_t\colon Q \to Q$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, $f_0 = \mathrm{id}$, $f_1(q_1, q_2, q_3, \ldots) = (q_2, q_1, q_3, \ldots)$, т.е. отобра-

жение f_1 переставляет первые две координаты точек. Этот результат важен при доказательстве стягиваемости группы гомеоморфизмов пространства Q. Детали см. у Вонга [55]. Доказательство 13.2 взято с некоторыми изменениями из § 3 работы Андерсона и Шори [3].

§ 14. Понятие произведения с переменным слоем введено в работе Андерсона и Шори [3].

§ 15. Основной результат, теорема 15.1, получен Андерсоном и Шори [3], и приводимое нами доказательство опирается на развитые ими идеи.

IV. Z-МНОЖЕСТВА Q-МНОГООБРАЗИЙ

Целью этой главы является изучение произвольного Z-множества Q-многообразия. Нашими основными результатами будут теоремы 18.2 и 19.4, в которых мы получим обобщения теорем 11.2 (об аппроксимации отображений Z-вложениями) и 11.1 (о продолжении гомеоморфизмов) соответственно на случай Q-многообразий. При этом мы начнем с изучения компактного случая. Здесь мы будем сводить задачу о компактном Z-множестве Q-многообразия к соответствующей задаче о компактном Z-множестве в пространстве Q и далее применять теоремы 11.1 и 11.2. Такая редукция содержится, например, в 17.3, где мы покажем, что произвольное Z-множество Q-многообразия обладает окрестностью, гомеоморфной открытому подмножеству пространства Q. Результаты для некомпактных Z-множеств следуют из компактного случая почти автоматически.

§ 16. Подмногообразия с воротником. Пусть A есть подмножество пространства X. Вложение φ: $U \times [0, 1) \to X$ называется *воротником,* если оно открыто и для любой точки $a \in A$ $\varphi(a, 0) = a$. Множество $\varphi(A \times [0, 1))$ называется при этом *воротниковой окрестностью*[1]. Подмножество A пространства X локально обладает воротником, если для любой точки $a \in A$ найдется окрестность U этой точки в подпространстве A, обладающая воротником в пространстве X. Мы будем пользоваться следующим результатом М. Брауна (необычайно короткое доказательство которого можно найти в [23]).

16.1. Теорема. *Пусть A есть локально компактное подпространство локально компактного пространства X и подпространство A локально обладает воротником в пространстве X. Тогда подпространство A обладает воротником в пространстве X.*

16.2. Теорема. *Пусть M и N — Q-многообразия, M есть Z-множество пространства N. Тогда пространство M обладает воротником в пространстве N.*

---

[1] А иногда и просто воротником. — *Прим. перев.*

Доказательство. По теореме 16.1 мы должны лишь показать, что множество M локально обладает воротником в пространстве N. Возьмем произвольно замкнутую окрестность G в пространстве M, гомеоморфную гильбертову кубу Q. Возьмем эту окрестность столь малой, чтобы она лежала в некотором открытом подмножестве U пространства N, гомеоморфном открытому подмножеству пространства Q. Допуская вольность речи, считаем само множество U открытым подмножеством пространства Q. Тогда G является Z-множеством пространства Q. Из теоремы 11.1 легко следует, что множество G обладает воротником в пространстве Q, а следовательно, и в подпространстве U. Так как всякая точка множества M лежит внутри некоторой такой замкнутой окрестности G, мы заключаем, что множество M локально обладает воротником. ■

16.3. Следствие. *Если M есть Q-многообразие, то произведение $M \times [0, 1]$ гомеоморфно некоторому открытому подмножеству пространства Q.*

Доказательство. Рассмотрим одноточечную компактификацию $\tilde{M} = M \cup \{\infty\}$ пространства M; это есть компактное метрическое пространство. Будем считать, что пространство $\tilde{M}$ вложено в гильбертов куб Q так, что точка ∞ совпадает с $0 \in Q$. Тогда M есть Z-множество пространства $Q \setminus \{0\}$, и мы применяем теорему 16.2. ■

§ 17. Редукция к гильбертову кубу. В 17.3 мы покажем, что всякое Z-множество Q-многообразия обладает окрестностью, гомеоморфной открытому подмножеству гильбертова куба Q. Особо важной для нас является теорема 17.2, в которой мы покажем, что Z-множества Q-многообразия могут быть растащены малой изотопией. Введем следующее понятие: пусть $F: A \times I \to X$ — некоторая гомотопия и $\mathscr{U}$ — открытое покрытие пространства X; мы говорим, что гомотопия *ограничена покрытием* $\mathscr{U}$, если для любой точки $a \in A$ найдется элемент U покрытия $\mathscr{U}$, содержащий множество $F(\{a\} \times I)$. Докажем теперь локальный вариант теоремы 11.1.

17.1. Лемма. *Пусть G есть открытое подмножество пространства Q, A — компакт, $F: A \times I \to G$ — гомотопия, у которой отображения F_0 и F_1 являются вложениями. Тогда существует изотопия $H: Q \times I \to Q$, у которой $H_0 = \mathrm{id}$, $H_1 F_0 = F_1$ и $H_t|_{Q \setminus G} = \mathrm{id}$. Более того, если гомотопия F ограничена открытым покрытием $\mathscr{U}$ подпространства G, то изотопию H можем выбрать так, чтобы гомотопия $H|_{G \times I}$ была также ограничена покрытием $\mathscr{U}$.*

Доказательство. Наше доказательство будет аналогичным доказательству теоремы 9.1. Для произвольного открытого покрытия $\mathscr{V}$ подпространства G существует гомеоморфизм $h_1: Q \to Q$, $\mathscr{V}$-близкий к тождественному отображению id, такой, что $h_1|_{Q \setminus G} = \mathrm{id}$, $h_1 F_1(A) \cap F_0(A) = \varnothing$. (Применяем теорему 10.2 и лемму 6.1.) Используя теорему 11.2, получаем Z-вложение $\tilde{F}: A \times I \to G$, для которого $\tilde{F}_0 = F_0$, $\tilde{F}_1 = h_1 F_1$ и которое при соответствующем выборе покрытия $\mathscr{V}$ будет ограничено покрытием $\mathscr{U}$.

Как в доказательстве теоремы 9.1, строим гомеоморфизм $h_2: Q \to Q$, для которого $h_2 \tilde{F}_0 = \tilde{F}_1$, $h_2|_{Q \setminus G} = \mathrm{id}$ и отображение $h_2|_G$ $\mathscr{U}$-близко к id. Тогда отображение $h = h_1^{-1} h_2: Q \to Q$ является гомеоморфизмом и $hF_0 = F_1$, $h|_{Q \setminus G} = \mathrm{id}$, отображение $h|_G$ $\mathscr{U}$-близко к id (при соответствующем выборе покрытия $\mathscr{V}$). Каждое из отображений h_1 и h_2 можно выбрать так, что они будут конечными отображениями изотопий, начинающихся с тождественного отображения, и мы будем иметь изотопию $H: Q \times I \to Q$, удовлетворяющую нашим условиям ($H_1 = h$). ■

17.2. Теорема. *Пусть M есть Q-многообразие, $A, B \subset M$ Z-множества, $\mathscr{U}$ — открытое покрытие Q-многообразия M. Тогда существует изотопия $H: M \times I \to M$, ограниченная покрытием $\mathscr{U}$, для которой $H_0 = \mathrm{id}$, $H_1(A) \cap B = \varnothing$.*

Доказательство. Рассмотрим вместо Q-многообразия M гомеоморфное ему по теореме 15.1 Q-многообразие $M \times [0, 1]$ и представим множество A в виде объединения $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ компактных множеств A_n, каждое из которых целиком лежит либо в множестве $M \times [0, \frac{2}{3})$, либо в множестве $M \times (\frac{1}{3}, 1]$. Предположим для определенности, что $A_1 \subset M \times [0, \frac{2}{3})$; так как B есть Z-множество Q-многообразия $M \times [0, 1]$, существует сколь угодно близкое к id отображение $f_1: A_1 \to (M \times [0, \frac{2}{3}) \setminus B\}$. Пространство $M \times [0, \frac{2}{3})$ гомеоморфно открытому подмножеству гильбертова куба, и мы можем поэтому воспользоваться теоремой 11.2, аппроксимировать отображение f_1 Z-вложением $g_1: A_1 \to (M \times [0, \frac{2}{3}) \setminus B\}$. Если отображение g_1 выбрано достаточно близким к тождественному, то существует малая гомотопия $g_1 \simeq \mathrm{id}$ по подпространству $M \times [0, \frac{2}{3})$. Используя лемму 17.1 для продолжения Z-вложения g_1, находим мало-

сдвигающую изотопию

$$H^1 \colon M \times [0, 1] \times I \to M \times [0, 1],$$

для которой $H_0^1 = \mathrm{id}$, $H_1^1(A_1) \cap B = \varnothing$. (Более точно, мы применяем лемму 17.1 для построения изотопии $G \colon M \times [0, \frac{2}{3}) \times I \to M \times [0, \frac{2}{3})$, для которой $G_0 = \mathrm{id}$ и $G_1(A_1) \cap B = \varnothing$. При соответствующем выборе покрытия подпространства $M \times [0, \frac{2}{3})$ гомотопия G может быть продолжена тождественным отображением до нашего отображения H[1]. Нашу изотопию H^1 мы можем выбрать так, что при $n \geqslant 2$ либо $H_1^1(A_n) \subset M \times [0, \frac{3}{4})$, либо $H_1^1(A_n) \subset M \times (\frac{1}{4}, 1]$.

Продолжая в этом духе, строим по индукции изотопии $H^1, H^2, \ldots$, Q-многообразия $M \times [0, 1]$, достаточно близкие к тождественному отображению, такие, что $H_0^n = \mathrm{id}$ и $H_1^n \ldots H_1^2 H_1^1(A_n) \cap B = \varnothing$. Используя теорему 5.1[1], выбираем изотопии H^n так, что

$$h = \lim_{n \to 1} H_1^n \ldots H_1^2 h_1^1$$

есть гомеоморфизм Q-многообразия $M \times [0, 1]$ на себя. Выполнения условия $h(A) \cap B = \varnothing$ добиваемся, выбирая отображения H_1^n достаточно близкими к тождественному (на n-м шаге множество A_n «отодвигаем» от множества B; последующие шаги должны не слишком «пододвигать» множество A_n к множеству B — ср. с доказательством леммы 10.1). Отображение h совпадает с отображением H_1 изотопии

$$H \colon M \times [0, 1] \times I \to M \times [0, 1],$$

которая, таким образом, удовлетворяет нашим условиям. ■

17.3. Следствие. *Пусть A есть Z-множество Q-многообразия M. Тогда множество A обладает окрестностью, гомеоморфной открытому подмножеству пространства Q.*

Доказательство. Рассмотрим вместо Q-многообразия M гомеоморфное ему Q-многообразие $M \times I$. По теореме 17.2 мы можем полагать, что $M \subset M \times [0,1)$, и теперь мы получаем наше утверждение из следствия 16.3. ■

---

[1] Вернее, идею ее доказательства. — *Прим. перев.*

§ 18. Аппроксимация отображений Z-вложениями. Теперь мы установим аналог теоремы 11.2 для Q-многообразий. В качестве первого шага на этом пути нам удобно рассмотреть сначала компактный случай, который сразу сводится к случаю гильбертова куба.

18.1. Лемма. *Пусть (A, A_0) — компактная пара, M — Q-многообразие, $f\colon A \to M$ — отображение, ограничение $f|_{A_0}$ которого на множество A_0 является Z-вложением. Тогда существует сколь угодно близкое к отображению f Z-вложение $g\colon A \to M$, совпадающее с отображением f на множестве A_0.*

Доказательство. Рассмотрим вместо Q-многообразия M гомеоморфное ему Q-многообразие $M \times I$ и применим теорему 17.2, чтобы предположить дополнительно: $f(A_0) \subset M \times [0, 1)$. Очевидно, существует отображение $f_1\colon A \to M \times [0, 1)$, совпадающее с отображением f на множестве A_0 и аппроксимирующее отображение f. Теперь применяем следствие 16.3 и теорему 11.2. ■

18.2. Теорема. *Пусть A_0 есть замкнутое подмножество локально компактного пространства A, M есть Q-многообразие и $f\colon A \to M$ — собственное отображение, ограничение которого на множество A_0 является Z-вложением. Тогда существует сколь угодно близкое к отображению f Z-вложение $g\colon A \to M$, совпадающее с отображением f на множестве A_0.*

Доказательство. Представим множество A в виде объединения $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ таких компактных множеств A_n, что $A_n \subset \operatorname{Int}(A_{n+1})$. Возьмем натуральное число n_1 столь большим, что

$$f(A_1) \cap f((A \setminus \operatorname{Int}(A_{n_1})) \cap A_0) = \varnothing.$$

По лемме 18.1 мы можем аппроксимировать отображение $f|_{A_{n_1}}$ Z-вложением $g_1'\colon A_{n_1} \to M$, для которого $g_1'|_{A_{n_1} \cap A_0} = f|_{A_{n_1} \cap A_0}$. Если отображение g_1' достаточно близко к отображению $f|_{A_1}$, существует малая гомотопия $g_1' \simeq f|_{A_{n_1}} \operatorname{rel} A_{n_1} \cap A_0$. (См. замечание, следующее за доказательством нашей теоремы.) Теперь мы легко можем построить отображение $g_1''\colon A_{n_1} \to M$, совпадающее с отображением f на границе $\operatorname{Bd}(A_{n_1})$ множества A_n и с отображением g_1' на множестве $A_1 \cup (A_{n_1} \cap A_0)$. (Точнее, зададим $g_1''(x) = F(x, \varphi(x))$, где F_t есть малая гомотопия $g_1' \simeq f|_{A_{n_1}} \operatorname{rel} A_{n_1} \cap A_0$ и $\varphi\colon A_{n_1} \to [0, 1]$ — функция, равная нулю на множестве A_1 и единице на множестве $\operatorname{Bd}(A_{n_1})$). Продолжая

отображение g_1'' отображением f, получаем собственное отображение $g_1\colon A \to M$, которое совпадает с отображением g_1' на множестве A_1. Так как отображение g_1 может быть выбрано сколь угодно близким к отображению f, выберем его так, что

$$g_1(A_1) \cap f((A \setminus \operatorname{Int}(A_{n_1})) \cap A_0) = \varnothing.$$

Отсюда следует, что отображение $g_1|_{A_1 \cup A_0}$ взаимно однозначно и поэтому является Z-вложением.

Второй шаг аналогичен первому: строим собственное отображение $g_2\colon A \to M$, ограничение которого на множество $A_2 \cup A_0$ является Z-вложением и

$$g_2|_{A_1 \cup A_0} = g_1|_{A_1 \cup A_0}.$$

Отображение g_2 мы можем выбрать сколь угодно близким к отображению g_1. Выбрав таким образом индуктивно отображения $g_1, g_2, \ldots$, зададим отображение $g\colon A \to M$

$$g(x) = \lim_{n \to \infty} g_n(x).$$

Отображение g непрерывно, ибо ничто не мешает нам выбирать последовательность $g_1, g_2, \ldots$ равномерно сходящейся, и, собственно, если оно построено нами достаточно близким к отображению f (см. теорему 4.1(2).) Следовательно, отображение g есть Z-вложение. ■

Замечание. В доказательстве теоремы 18.2 мы воспользовались следующим утверждением: пусть (A, A_0) — компактная пара, $X \setminus ANR$, $f, g\colon A \to X$ — отображения, совпадающие на множестве A_0. Если отображения f и g достаточно близки, то $f \simeq g \operatorname{rel} f_0$. Для читателя не составит труда доказать это.

§ 19. Продолжение гомеоморфизмов. Теперь, наконец, докажем аналог теоремы 11.1 для Q-многообразий. Нам удобно при этом начать с компактного случая.

19.1. Лемма. *Пусть A — компакт, M — Q-многообразие, $F\colon A \times I \to M$ — гомотопия, такая, что отображения F_0 и F_1 являются Z-вложениями. Тогда существует изотопия $H\colon M \times I \to M$, такая, что $H_0 = \mathrm{id}$ и $H_1 F_0 = F_1$. Более того, если гомотопия F ограничена открытым покрытием $\mathscr{U}$, мы можем взять гомотопию H также ограниченной покрытием $\mathscr{U}$.*

Доказательство. Рассмотрим вместо Q-многообразия M гомеоморфное ему Q-многообразие $M \times [0, 1]$ и применим теорему 17.2, чтобы предположить дополнительно $F(A \times I) \subset M \times [0, 1)$. Затем воспользуемся леммой 17.1. ■

19.2. Определение. Введем теперь обозначение, которое будет нам полезно в доказательстве теоремы 19.4. Если $r\colon X\to[0,1]$ — функция, то множество $X\times_r[0,1]=U\{\{x\}\times[0,r(x)]\mid x\in X\}\subset\subset X\times[0,1]$ называется произведением с переменным слоем.

(Ср. с определением в § 14.) В следующем предложении заключена основная идея доказательства теоремы 19.4.

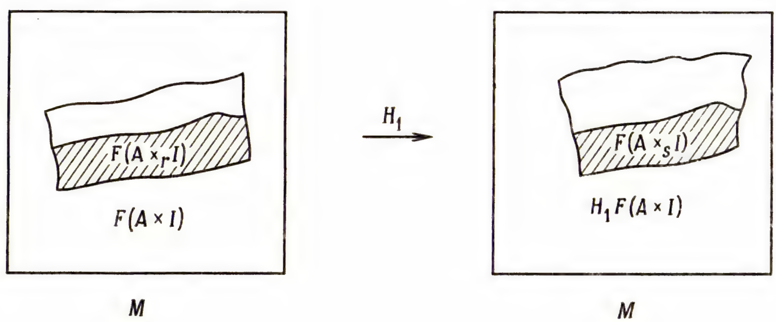
19.3. Лемма. *Пусть M есть Q-многообразие, A — локально компактное пространство, $F\colon A\times I\to M$ — Z-вложение, $r, s\colon A\to[\frac{1}{2}, 1]$ — такие функции, что замыкание множества*

$$D=\{a\in A\mid r(a)\neq s(a)\}$$

компактно. Тогда существует изотопия $H\colon M\times I\to M$, такая, что $H_0=$ id, отображение H_1 переводит множество $F(A\times_r I)$ на множество $F(A\times_s I)$:

$$H_1F(a,t)=F\left(a,\frac{ts(a)}{r(a)}\right),\qquad \text{где}\qquad (a,t)\in A\times_r I.$$

Более того, если $\mathcal{U}$ есть открытое покрытие Q-многообразия M, ограничивающее гомотопию F, и $G\subset M$ есть открытое множество, содержащее множество $F(Cl(D)\times I)$, то гомотопию H мы можем выбрать так, что она будет ограничена покрытием $\mathcal{U}$ и при любом $t\in I H_t|_{M\setminus G}=$ id.



Доказательство. Доказательство близко к доказательству теоремы 9.1 и поэтому мы не будем вдаваться во все подробности. Рассматривая вместо M гомеоморфное ему Q-многообразие $M\times[-1,2]$, не составляет труда указать такое Z-вложение

$$A\to A'\hookrightarrow M\ (\text{обозначение: } a\to a'),$$

что отображения

$$A \to A' \hookrightarrow M \to M \times \{0\} \hookrightarrow M \times [-1, 2],$$

$$A \to A \times \{0\} \hookrightarrow A \times I \xrightarrow{F} M \times [-1, 2]$$

собственно гомотопны. Существует компактная окрестность $N \subset A$ множества $Cl(D)$, и по лемме 19.1 гомотопию F можно подправить так, что

$$F(a, t) = (a', t) \quad \text{при} \quad (a, t) \in N \times I.$$

Теперь требуемая изотопия получается простым сдвигом по второй координате (т.е. по сомножителю $[-1, 2]$, см. отображение h_3 в доказательстве теоремы 9.1). ■

19.4. Теорема. *Пусть M есть Q-многообразие, A — локально компактное пространство, F: $A \times I \to M$ — собственная гомотопия, для которой отображения F_0 и F_1 являются Z-вложениями. Тогда существует такая изотопия H: $M \times I \to M$, что $H_0 = \mathrm{id}$ и $H_1 F_0 = F_1$. Более того, если гомотопия F ограничена открытым покрытием $\mathscr{U}$ Q-многообразия M, то изотопию H можно выбрать также ограниченной покрытием $\mathscr{U}$.*

Доказательство. По теореме 17.2 мы можем предполагать, что $F_0(A) \cap F_1(A) = \varnothing$, а применяя теорему 18.2, можно считать, что отображение F является Z-вложением. Мы построим такие гомеоморфизмы f, g: $M \to M$, что $f F_1 = F_{1/2}$ и $gF_0 = F_{1/2}$, и, таким образом, для гомеоморфизма $h = f^{-1}g$: $M \to M$ будем иметь $hF_0 = F_1$. Будет очевидно из построения, что гомеоморфизм h можно считать конечным отображением некоторой изотопии, удовлетворяющей нашим условиям. Приступим к построению гомеоморфизма f. (Отображение g строится аналогично.)

Представим пространство A в виде объединения $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ таких его компактных подмножеств A_n, что $A_n \subset \mathrm{Int}\,(A_{n+1})$. Применяя лемму 19.3 к нечетным кольцам A_1, $A_3 \setminus \mathrm{Int}\,(A_2)$, $A_5 \setminus \mathrm{Int}\,(A_4), \ldots$, строим гомеоморфизм f_1: $M \to M$, переводящий множество $F(A \times I)$ на множество $F(A \times_r I)$, где функция r: $A \to [\frac{1}{2}, 1]$ принимает значение $\frac{1}{2}$ на нечетных кольцах. Применяя лемму 19.3 к четным кольцам $A_2 \setminus \mathrm{Int}\,(A_1)$, $A_4 \setminus \mathrm{Int}\,(A_3), \ldots$, строим гомеоморфизм f_2: $M \to M$, переводящий множество $F(A \times_r I)$ на множество $F(A \times [0, \frac{1}{2}])$. Очевидно, отображение $f = f_2 f_1$ удовлетворяет нашим условиям. ■

Замечания

§ 16. Теорема 16.2 и ее следствие 16.3 получены впервые Чепмэном [11], хотя данные там доказательства отличаются от приведенных в этой книге. Интересно отметить, что способом, похожим на употребленный в доказательстве следствия 16.3, можно установить, что если M есть s-многообразие, то пространство $M \times [0, 1)$ гомеоморфно открытому подмножеству s. Отсюда, как только установлен гомеоморфизм пространств M и $M \times [0, 1)$, следует общая теорема Хендерсона об открытых вложениях для s-многообразий [30].

§ 19. Основной результат появился впервые в работе Андерсона и Чепмэна [5] и излагается здесь с небольшими изменениями в доказательстве.

V. Q-МНОГООБРАЗИЯ, ПРЕДСТАВЛЕННЫЕ В ВИДЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ НА ПОЛУИНТЕРВАЛ

В этой главе мы изучаем Q-многообразия, гомеоморфные произведению на полуинтервал. Наш основной результат — теорема 21.2, где мы покажем, что если M и N являются гомотопически эквивалентными Q-многообразиями, то пространства $M \times [0, 1)$ и $N \times [0, 1)$ гомеоморфны. Как следствие этого мы получим в теореме 22.1, что всякое компактное стягиваемое Q-многообразие гомеоморфно пространству Q. Это будет нам полезно в дальнейшем. В теореме 23.1 мы докажем, что для любого Q-многообразия M пространство $M \times [0, 1)$ триангулируемо.

§ 20. Поглощение. Мы изложим здесь основной технический результат, необходимый для получения теоремы 21.2. Мы опираемся при этом на простую технику поглощения, использующую только аппарат Z-множеств.

20.1. Теорема. *Пусть Q-многообразие M является Z-подмножеством Q-многообразия N и вложение $M \hookrightarrow N$ есть гомотопическая эквивалентность. Тогда существует такое открытое вложение $h: M \times [0, 1) \to N$, что $N \setminus h(M \times [0, 1))$ есть Z-множество пространства N и при $m \in M$ $h(m, 0) = m$.*

Доказательство. Из теоремы 16.2 следует, что Z-множество M Q-многообразия N обладает воротником. Допуская вольность речи, считаем пространство $M \times [0, 1)$ открытым подмножеством пространства N, отождествляя множество M с множеством $M \times \{0\} \subset M \times [0, 1)$. Пусть A есть компактное Z-множество пространства N. Прежде всего покажем, что множество A может быть *поглощено* воротником $M \times [0, 1)$, т.е. существует такой гомеоморфизм

$$g: N \to N, \quad \text{что} \quad g|_M = \mathrm{id} \quad \text{и} \quad A \subset g(M \times [0, 1)).$$

Это даст нам возможность провести основное индуктивное построение.

Вложение $M \hookrightarrow N$ есть гомотопическая эквивалентность, поэтому существует такая деформация $r_t: N \to N$, что $r_0 = \mathrm{id}$, $r_1(N) = M$ и при любом t $r_t|_M = \mathrm{id}$ (см. [46, стр.31]). По теореме 18.2 собственное отображение

$$r_1|_{M \cup A}: M \cup A \to M \times [0, 1)$$

может быть приближено Z-вложением f: $M \cup A \to M \times [0, 1)$, совпадающим с тождественным отображением на множестве M. Таким образом, отображение f является гомеоморфизмом между Z-множествами Q-многообразия N, собственно гомотопным тождественному отображению. По теореме 19.4 мы можем продолжить отображение f до гомеоморфизма $\tilde{f}$: $N \to N$. Гомеоморфизм $g = (\tilde{f})^{-1}$ удовлетворяет нашим условиям.

Пусть теперь $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset N$ есть счетное объединение компактных Z-подмножеств Q-многообразия N. Построим такое открытое вложение h: $M \times [0, 1) \to N$, что $X \subset h(M \times [0, 1))$ и $h|_M = \mathrm{id}$. Как только мы сможем это сделать, нам останется выбрать множество X так, что всякое лежащее в дополнении к нему замкнутое множество будет Z-множеством. (На самом деле нам нужно, чтобы таковым было множество $N \setminus h(M \times [0, 1))$.)

В соответствии с проведенным нами ранее построением мы можем указать гомеоморфизм g_1: $N \to N$, совпадающий с тождественным отображением на множестве M и для которого $A_1 \subset g_1(M \times [0, \frac{1}{2}))$. Рассмотрим теперь Q-многообразие $N' = N \setminus g_1(M \times [0, \frac{1}{2}))$. Очевидно, множество $g_1(M \times \{\frac{1}{2}\})$ является Z-множеством пространства N', множество $A_2' = A_2 \cap N'$ — компактным Z-множеством пространства N' (применяем теорему 3.1) и вложение $g_1(M \times \{\frac{1}{2}\}) \hookrightarrow N'$ — гомотопической эквивалентностью. Еще раз применяя это построение, получим гомеоморфизм g'_2: $N' \to N'$, совпадающий с тождественным отображением на множестве $g_1(M \times \{\frac{1}{2}\})$ и для которого $A_2' \subset g_2' g_1(M \times [\frac{1}{2}, \frac{2}{3}))$. Продолжаем отображение g_2' до гомеоморфизма g_2: $N \to N$, полагая $g_2 = \mathrm{id}$ на подпространстве $g_1(M \times [0, \frac{1}{2}])$. Имеем:

$$A_1 \cup A_2 \subset g_2\, g_1(M \times [0, \frac{2}{3})).$$

Аналогично по индукции строим гомеоморфизмы g_n: $N \to N$,

такие, что $g_{n+1} = \mathrm{id}$ на $g_n(M \times [0, \frac{n}{n+1}])$ и $A_1 \cup \ldots \cup A_n \subset g_n g_{n-1} \ldots g_1(M \times [0, \frac{n}{n+1}))$. Зададим отображение h: $M \times [0, 1) \to N$, положив $h(x) = \lim_{n\to\infty} g_n \ldots g_1(x)$. Отображение h является открытым вложением, и $X \subset h(M \times [0, 1))$.

Покажем наконец, что мы можем так выбрать множество X, что всякое лежащее в дополнении к нему замкнутое множество является Z-множеством. Рассмотрим подпространство $M \times B(Q)$ произведения $M \times Q$. Множество $M \times B(Q)$ легко представить в виде объединения счетного семейства компактов. Заметим, что существуют сколь угодно близкие к тождественному отображению отображения произведения $M \times Q$ в подпространства $M \times B(Q)$ и $M \times s$. (В первом случае рассмотрим гомотопию F_t: $Q \to Q$, для которой $F_0 = \mathrm{id}$ и при $0 < t \leqslant 1$ $F_t(Q) \subset B(Q)$. Построение гомотопии F_t вполне элементарно. Затем рассмотрим собственное отображение φ: $M \to (0, 1]$ и определим отображение произведения $M \times Q$ в произведение $M \times B(Q)$, считая, что точка (m, q) переходит в точку $(m, F_{\varphi(m)}(q))$. Беря функцию φ достаточно близкой к нулевой, мы можем сделать это отображение сколь угодно близким к тождественному. Аналогично строится отображение пространства $M \times Q$ в пространство $M \times s$.) Пусть α: $M \to M \times Q$ — гомеоморфизм и множество $X = \alpha^{-1}(M \times B(Q))$. Множество X легко представляется в виде объединения счетного числа компактных Z-множеств пространства M и удовлетворяет всем нашим условиям. ■

§ 21. Основной результат. Теперь мы докажем, что $[0, 1)$ — стабильная классификация Q-многообразий совпадает с гомотопической классификацией. Начнем со следующей леммы.

21.1. Лемма. *Пусть даны Q-многообразия M и N и отображение f: $M \to N \times [0, 1)$. Тогда отображение f гомотопно собственному отображению пространства M в произведение $N \times [0, 1)$.*

Доказательство. Пусть φ: $M \to [0, 1)$ — собственное отображение и π: $N \times [0, 1) \to N$ — проектирование произведения на первый сомножитель. Зададим отображение g: $M \to N \times [0, 1)$ формулой

$$g(m) = (\pi f(m), \varphi(m)).$$

Как легко видеть, отображение g_m является собственным и гомотопно отображению f. ■

21.2. Теорема. *Пусть Q-многообразия M и N гомотопически эквивалентны. Тогда пространства $M \times [0, 1)$ и $N \times [0, 1)$ гомеоморфны.*

Доказательство. Пусть $f\colon M \to N \times [0, 1)$ — гомотопическая эквивалентность; по лемме 21.1 отображение f гомотопно собственному отображению $g\colon M \to N \times [0, 1)$. По теореме 18.2 отображение g гомотопно Z-вложению $g_1\colon M \to N \times [0, 1)$. Отметим, что указанное нами вложение $g_1\colon M \hookrightarrow N \times [0, 1)$ является гомотопической эквивалентностью. По теореме 20.1 имеет место гомеоморфизм.

$$(*) \qquad M \times [0, 1) \cong (N \times [0, 1)) \setminus A,$$

где $A \subset N \times [0, 1)$ есть Z-множество. Умножая обе части $(*)$ на полуинтервал $[0, 1)$, получаем гомеоморфизм

$$(*\,*) \qquad M \times [0, 1) \times [0, 1) \cong ((N \times [0, 1) \setminus A)[0, 1).$$

Теперь мы покажем, что левая часть $(**)$ гомеоморфна пространству $M \times [0, 1)$, а правая часть гомеоморфна пространству $N \times [0, 1)$.

Первое легко следует из того, что произведение $[0, 1) \times [0, 1)$ гомеоморфно произведению $[0, 1] \times [0, 1)$, и поэтому, в силу стабильности Q-многообразий (теорема 15.1),

$$M \times [0, 1) \times (0, 1) \cong M \times [0, 1] \times [0, 1) \cong M \times [0, 1).$$

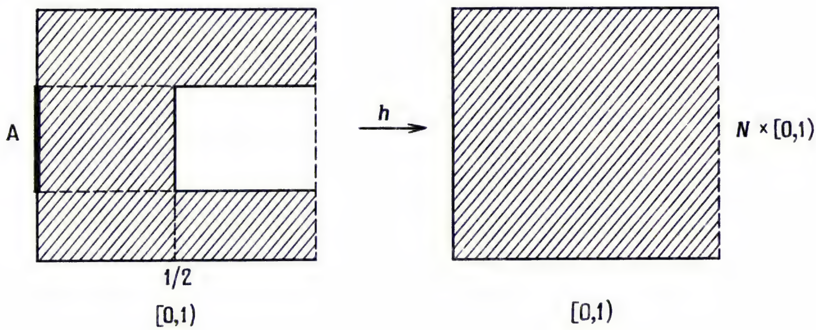
Чтобы доказать второе, заметим прежде всего, что множества $A \times [0, 1)$ и $A \times [\frac{1}{2}, 1)$ являются Z-множествами Q-многообразия $(N \times [0, 1)) \times [0, 1)$ (ибо таковым является подмножество A пространства $N \times [0, 1)$). По теореме 19.4 существует гомеоморфизм Q-многообразия $N \times [0, 1) \times [0, 1)$ на себя, переводящий множество $A \times [0, 1)$ на множество $A \times [\frac{1}{2}, 1)$. Таким образом, правая часть $(*\,*)$ гомеоморфна подпространству

$$((N \times [0, 1)) \times [0, 1)) \setminus (A \times [\tfrac{1}{2}, 1)).$$

Мы утверждаем, что пространство $(N \times [0, 1)) \times [0, 1)$ гомеоморфно своему подпространству $((N \times [0, 1)) \times [0, 1)) \setminus (A \times [\frac{1}{2}, 1))$. Этим мы покажем, что правая часть $(*\,*)$ гомеоморфна произведению $(N \times [0, 1)) \times [0, 1)$, а следовательно, и произ-

ведению $N\times[0,\ 1)$

$$(N\times[0,\ 1))\times[0,\ 1)\setminus A\times[\tfrac{1}{2},\ 1)\quad(N\times[0,\ 1))\times[0,\ 1).$$



Чтобы построить гомеоморфизм h:

$$((N\times[0,\ 1))\times[0,\ 1))\setminus(A\times[\tfrac{1}{2},\ 1))\to(N\times[0,\ 1))\times[0,\ 1),$$

рассмотрим гомотопию θ_t: $[0,\ 1]\to[0,\ 1]$, $0\leqslant t\leqslant 1$, такую, что

(1) отображение θ_t есть гомеоморфизм при $0<t\leqslant 1$,

(2) $\theta_0([\frac{1}{2},\ 1])=\{1\}$,

(3) отображение $\theta_0|_{[0,\ \frac{1}{2})}$: $[0,\ \frac{1}{2})\to[0,\ 1)$ является гомеоморфизмом.

Пусть φ: N: $[0,\ 1)\to[0,\ 1]$ есть отображение, для которого $\varphi^{-1}(0)=A$. Зададим гомеоморфизм h формулой

$$h(x,\ t)=(x,\ \theta_{\varphi(x)}(t)).\quad\blacksquare$$

21.3. Добавление. *Если f: $M\to N$ — гомотопическая эквивалентность Q-многообразий, то отображение* $f\times\mathrm{id}$: $M\times[0,\ 1)\to N\times[0,\ 1)$ *гомотопно гомеоморфизму.*

Доказательство. Это следует из доказательства теоремы 21.2. ■

21.4. Следствие. *Пусть M — стягиваемое Q-многообразие. Тогда*

$$M\times[0,\ 1)\cong Q\times[0,\ 1).$$

§ 22. Стягиваемые компактные Q-многообразия. Сейчас в теореме 22.1 мы покажем, что гильбертов куб Q является един-

ственным стягиваемым компактным Q-многообразием. Этот факт будет ключевым в доказательстве теоремы о ручном выпрямлении в гл. X.

22.1. Теорема. *Пусть M есть стягиваемое компактное Q-многообразие. Тогда $M \cong Q$.*

Доказательство. Из теоремы 21.4 следует, что конус $C(M)$ над пространством M гомеоморфен конусу $C(Q)$ над гильбертовым кубом Q и по теореме 12.2 конус $C(Q)$ гомеоморфен гильбертову кубу Q. Таким образом, мы должны лишь убедиться в том, что $C(M) \cong M$. Возьмем произвольно точку $p \in M$. Нам достаточно доказать, что $M \times [0, 1) \cong M \setminus \{p\}$.

Построим последовательность таких открытых вложений φ_i: $Q \times [0, 1) \to M \times [0, 1]$, $i = 1, 2, \ldots,$ что $\varphi_{i+1}(Q \times [0, 1)) \subset \subset \varphi_i(Q \times [0, \frac{1}{2}))$ и $M \times \{1\} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \varphi_i (Q \times [0, 1))$ (такую последовательность вложений построить можно, так как по следствию 21.4 $M \times (t, 1] \cong Q \times [0, 1))$, и последовательность таких открытых вложений $\psi_i : Q \times [0, 1] \to M$, что $\psi_{i+1}((Q \times [0, 1)) \subset \subset \psi_i [0, \frac{1}{2}))$ и $\{p\} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \varphi_i (Q \times [0, 1))$.

Сдвигая по воротникам, получаем гомеоморфизмы

$$M \times [0, 1] \setminus \varphi_1(Q \times [0, \tfrac{1}{2})) \cong M \times [0, 1],$$

$$M \setminus \psi_1(Q \times [0, \tfrac{1}{2})) \cong M.$$

Используя теорему 15.1 о стабильности Q-многообразий, строим гомеоморфизм h_1 пространства $M \times [0, 1] \setminus \varphi_1(Q \times \times [0, \frac{1}{2}))$ на пространство $M \setminus \psi_1(Q \times [0, \frac{1}{2}))$. По теореме 19.4 о продолжении гомеоморфизма с Z-множеств мы можем выбрать гомеоморфизм h_1 так, чтобы он переводил множество $\varphi_1(Q \times \{\frac{1}{2}\})$ на множество $\psi_1(Q \times \{\frac{1}{2}\})$. Поступаем далее, как в доказательстве теоремы 12.2. Строим для каждого натурального i гомеоморфизм h_{i+1} пространства $\varphi_i(Q \times [0, \frac{1}{2}]) \setminus \varphi_{i+1}(Q \times \times [0, \frac{1}{2}))$ на пространство $\psi_i(Q \times [0, \frac{1}{2}]) \setminus \psi_{i+1}(Q \times [0, \frac{1}{2}))$ так, чтобы они совпадали на пересечениях отображаемых подпространств и вместе с отображениями h_1 задавали гомеоморфизм пространства $M \times [0, 1)$ на пространство $M \setminus \{p\}$. ■

§ 23. Триангулирование Q-многообразий. В теореме 23.1 мы докажем, что для произвольного Q-многообразия пространство $M \times [0, 1)$ может быть *триангулировано*. Это означает существование такого полиэдра X, что пространства $M \times [0, 1)$ и $X \times Q$ гомеоморфны. (Под полиэдром мы понимаем локально компактное пространство, которое может быть триангулировано некоторым симплициальным комплексом K, т.е. пространство X является телом комплекса K: $X = |K|$. При этом подполиэдром полиэдра X мы называем множество вида $|L|$, где L есть подкомплекс некоторого подразделения комплекса K.)

23.1. Теорема. *Пусть M есть Q-многообразие. Тогда пространство X может быть триангулировано.*

Доказательство. Q-многообразие M, будучи абсолютным окрестностным ретрактом, имеет, как хорошо известно, гомотопический тип некоторого полиэдра Y (см. [38]). Представим полиэдр Y в виде объединения $Y = Y_1 \cup Y_2 \cup \ldots$ таких его компактных подполиэдров Y_n, что $Y_n \subset \operatorname{Int}(Y_{n+1})$.

Мы можем рассматривать подполиэдр $\operatorname{Bd}(Y_n)$ в качестве подполиэдра компактного кусочно-линейного многообразия A_n, причем вложение $\operatorname{Bd}(Y_n) \hookrightarrow A_n$ является гомотопической эквивалентностью. (В этом можно убедиться, рассматривая пространство $\operatorname{Bd}(Y_n)$ в качестве подполиэдра некоторого евклидова пространства и взяв в качестве пространства A_n соответствующую трубчатую окрестность множества $\operatorname{Bd}(Y_n)$. Подробности см. [31, гл. II].) Приклеивая каждое пространство A_n к пространству Y по общему подпространству $\operatorname{Bd}(Y_n)$, получаем полиэдр

$$Y' = Y \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right),$$

гомотопически эквивалентный Q-многообразию M.

Каждый из компактных подполиэдров $(Y_n \setminus \operatorname{Int}_Y (Y_{n-1})) \cup \cup A_{n-1} \cup A_n$ полиэдра Y' вложим в качестве подполиэдра в компактное кусочно-линейное многообразие B_n так, чтобы вложение было гомотопической эквивалентностью. Приклеивая каждое пространство B_n к пространству Y' по общей части $(Y_n \setminus \operatorname{Int}_Y (Y_{n-1})) \cup A_{n-1} \cup A_n$, получаем полиэдр

$$Y'' = Y' \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right),$$

гомотопически эквивалентный Q-многообразию M. Имеем

$$Y'' = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \text{ и } B_n \cap B_{n+1} = A_n.$$

Рассмотрим полиэдр

$$X = (B_1 \times [0,\ 1] \times \{0\}) \cup (B_2 \times \{0\} \times [0,\ 1]) \cup$$
$$\cup (B_3 \times [0,\ 1] \times \{0\}) \cup \ \dots \ \subset Y'' \times [0,\ 1]^2.$$

Пусть $X_{2n-1} = B_{2n-1} \times [0,\ 1] \times \{0\}$ и $X_{2n} = B_{2n} \times \{0\} \times [0,\ 1]$. Каждое из подпространств вида $X_n \times Q$ и $(X_n \cap X_{n-1}) \times Q = A_n \times \times \{0\} \times \{0\} \times Q$ является Q-многообразием (ибо пространства X_n и A_n являются кусочно-линейными многообразиями). Заметим, что пересечение $X_n \cap X_{n+1}$ подпространств X_n и X_{n+1} является Z-множеством в каждом из этих подпространств. Отсюда по теореме 16.2 следует, что подпространство $(X_n \cup X_{n+1}) \times Q$ произведения $X \times Q$ есть Q-многообразие и, следовательно, само произведение $X \times Q$ является Q-многообразием.

Теперь, установив, что произведение $X \times Q$ является Q-многообразием, и зная, что оно гомотопически эквивалентно Q-многообразию M, мы можем утверждать в силу теоремы 21.2, что произведение $M \times [0,\ 1)$ гомеоморфно триангулированному Q-многообразию $X \times [0,\ 1) \times Q$. ■

Замечания

§ 20. Идеи техники поглощения взяты из работы Чепмэна [11].

§ 21. Основной результат параграфа, заключенный в добавлении 21.3 и в $[0,\ 1)$-стабильной классификации Q-многообразий при помощи гомотопического типа, взят из работы Чепмэна [11]. Подобным же образом может быть получена $[0,\ 1)$-стабильная классификация s-многообразий при помощи гомотопического типа. А так как всякое s-многообразие $[0,\ 1)$-стабильно, мы получаем результат Хендерсона о классификации s-многообразий при помощи гомотопического типа [30].

§ 22. Теорема 22.1 взята из работы Чепмэна [11]. В качестве следствия этой теоремы может быть легко получен результат Вонга [56] о вложении дважды оворотникованных экземпляров гильбертова куба в гильбертов куб.

§ 23. В работе Чепмэна [11] при помощи простых рассуждений показано, что всякое открытое подмножество гильбертова куба может быть триангулировано. Доказательство более слабой теоремы 23.1 несколько проще. Отметим, как и выше, подобные рассуждения применимы и к s-многообразиям. На этом пути может быть получено новое доказательство триангуляционной теоремы Хендерсона для s-многообразий [29].

VI. ШЕЙПЫ Z-МНОЖЕСТВ ГИЛЬБЕРТОВА КУБА

В этой главе мы докажем так называемую теорему о дополнениях для гильбертова куба. Она утверждает, что два Z-множества гильбертова куба имеют один и тот же шейп (в смысле Борсука [8]) тогда и только тогда, когда дополнения к ним в пространстве Q гомеоморфны. Трудная часть доказательства содержится в теореме 25.2, где показано, что из совпадения шейпов двух Z-множеств гильбертова куба следует гомеоморфность дополнений к ним. Обратная импликация устанавливается в теореме 25.1. В § 24 мы делаем для удобства читателя небольшой обзор понятий, связанных с определением шейповой эквивалентности.

§ 24. БОРСУКОВСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ШЕЙПА. Пусть A и B — компакты, лежащие в гильбертовом кубе Q. *Шейповым отображением* компакта A в компакт B называется такая последовательность отображений f_n: $Q \to Q$, что для любой окрестности V компакта B найдутся окрестность U компакта A и натуральное число N, такие, что при $n \geqslant N$ $f_n(U) \subset V$ и $f_n|_U \simeq f_{n+1}|_U$ (по V) (т.е. отображения $f_n|_U$ и $f_{n+1}|_U$ гомотопны как отображения в пространство V). Для этого шейпового отображения введем обозначение: $\mathbf{f} = \{f_n, A, B\}$: $A \to B$.

Два шейповых отображения $\mathbf{f} = \{f_n, A, B\}$ и $\mathbf{g} = \{g_n, A, B\}$ компакта A в компакт B называются *гомотопными* ($\mathbf{f} \simeq \mathbf{g}$), если для любой окрестности V компакта B найдутся окрестность U компакта A и натуральное число N, такие, что при $n \geqslant N$ $f_n|_U \simeq g_n|_U$ (по V).

Тождественным называется шейповое отображение $\mathbf{id}_A = \{\mathbf{id}_A, A, A\}$: $A \to A$. Если $\mathbf{f} = \{f_n, A, B\}$: $A \to B$ и $\mathbf{g} = \{g_n, B, C\}$ — два шейповых отображения, лежащих в гильбертовом кубе Q компактов, то их композицией называется отображение $\mathbf{gf} = \{g_n, f_n, A, C\}$: $A \to C$. Не составляет труда убедиться, что этим мы действительно определили шейповое отображение компакта A в компакт C. По аналогии с определением обычной гомотопической эквивалентности дадим определение шейповой

эквивалентности: шейповое отображение $\mathbf{f}$: $A \to B$ называется *шейповой эквивалентностью*, если существует такое отображение $\mathbf{g}$: $B \to A$, что $\mathbf{fg} \simeq \mathbf{id}_B$ и $\mathbf{gf} \simeq \mathbf{id}_A$. Если существует удовлетворяющее этому условию отображение компакта A на компакт B, то мы говорим, что компакты A и B имеют одинаковые шейпы, и пишем $\mathrm{Sh}(A) = \mathrm{Sh}(B)$.

Нетрудно доказать, что понятие шейповой эквивалентности не зависит от рассматриваемых в определении вложений компактов в гильбертов куб и связано только с топологическим типом этих компактов. Хорошим и не требующим особой изобретательности упражнением является доказательство того, что шейпы двух абсолютных окрестностных ретрактов A и B совпадают, $\mathrm{Sh}(A) = \mathrm{Sh}(B)$ тогда и только тогда, когда они гомотопически эквивалентны.

§ 25. Теорема о дополнениях. Сейчас мы докажем сформулированную ранее характеризацию шейповой эквивалентности Z-множеств гильбертова куба. Для удобства разделим доказательство на две части.

25.1. Теорема. *Пусть A и B суть Z-множества гильбертова куба Q и $Q \setminus A \cong Q \setminus B$. Тогда* $\mathrm{Sh}(A) = \mathrm{Sh}(B)$.

Доказательство. Пусть h: $Q \setminus A \to Q \setminus B$ — гомеоморфизм. Так как A есть Z-множество гильбертова куба, то существует такая гомотопия F_t: $Q \to Q$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, что $F_0 = \mathrm{id}$ и $F_t(Q) \subset Q \setminus A$ при $0 < t \leqslant 1$[1]. Аналогично, существует такая гомотопия G_t: $Q \to Q$, что $G_0 = \mathrm{id}$ и $G_t(Q) \subset Q \setminus B$ при $0 < t \leqslant 1$. Для всякого натурального числа n зададим отображения f_n: $Q \to Q$ и g_n: $Q \to Q$ формулами

$$f_n = hF_{1/n} \text{ и } g_n = h^{-1}G_{1/n}.$$

Нам осталось показать, что мы этим определили шейповые отображения $\mathbf{f} = \{f_n, A, B\}$: $A \to B$ и $\mathbf{g} = \{g_n, B, A\}$: $B \to A$ и что $\mathbf{fg} \simeq \mathbf{id}_B$ и $\mathbf{gf} \simeq \mathbf{id}_A$.

Убедимся, что $\mathbf{f}$ есть шейповое отображение. Возьмем произвольно окрестность V компакта B. Так как множество $h^{-1}(Q \setminus B) \cup A$ является окрестностью компакта A, то мы можем

---

[1] Это следует, например, из того, что в силу теоремы 10.2, леммы 6.1 и топологической однородности гильбертова куба (это следует из теоремы 11.1) мы можем предполагать, что $p_1(A) = \{-1\}$, и взять в качестве гомотопии F_t сдвиг по первой координате. — *Прим. перев.*

указать окрестность U компакта A и число $\varepsilon>0$, для которых $F_t(U)\subset h^{-1}(U\setminus B)\cup A$ при $0\leqslant t\leqslant\varepsilon$. Для $n\geqslant\frac{1}{\varepsilon}$ имеем $f_n|_U\simeq f_{n+1}|_U$ (по V). Аналогично доказывается, что g есть шейповое отображение.

Убедимся, что $gf=\mathrm{id}_A$. Возьмем произвольно окрестность U компакта A. Мы должны указать окрестность V компакта A и натуральное число N, для которых $g_nf_n|_V=\mathrm{id}_V$ (по U) при $n\geqslant N$. Выберем окрестность W компакта B и число $\varepsilon_1>0$ так, что $h^{-1}(W\setminus B)\subset U$ и $h^{-1}G(W)\subset U$ при $0<t\leqslant\varepsilon_1$. Выберем окрестность $V\subset U$ компакта A и число ε_2, $0<\varepsilon_2\leqslant\varepsilon_1$, так, что $hF_t(V)\subset W$ при $0<t\leqslant\varepsilon_2$. Теперь для $n\geqslant\frac{1}{\varepsilon_2}$ имеем

$$g_nf_n|_V=h^{-1}G_{\frac{1}{n}}hF_{\frac{1}{n}}|_V\simeq h^{-1}hF_{\frac{1}{n}}|_V=F_{\frac{1}{n}}|_V\simeq\mathrm{id}_V \qquad (\text{по } U).$$

Здесь первая гомотопия возникает, когда мы соединяем отображение $G_{\frac{1}{n}}|_W$ с отображением id_W при помощи гомотопии $G_t|_W$, $0\leqslant t\leqslant\frac{1}{n}$. Вторая гомотопия возникает, когда мы соединяем отображение $F_{\frac{1}{n}}|_V$ с отображением id_V при помощи гомотопии $F_t|_V$, $0\leqslant t\leqslant\frac{1}{n}$. Таким образом, $\mathbf{gf}=\mathbf{id}_A$. Аналогично, $\mathbf{fg}=\mathbf{id}_B$.

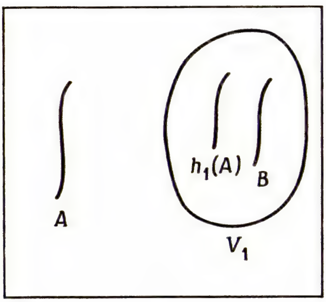
25.2. Теорема. *Пусть A и B — Z-множества гильбертова куба Q и* $\mathrm{Sh}(A)=\mathrm{Sh}(B)$. *Тогда* $Q\setminus A\cong Q\setminus B$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{f}=\{f_n, A, B\}: A\to B$ и $\mathbf{g}=\{g_n, B, A\}: B\to A$ — такие шейповые отображения, что $\mathbf{fg}=\mathbf{id}_B$ и $\mathbf{gf}=\mathbf{id}_A$. Мы построим такую последовательность $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ гомеоморфизмов гильбертова куба на себя, что отображение

$$h=\lim_{n\to\infty}h_n\ \ldots\ h_2h_1|_{Q\setminus A}$$

будет гомеоморфизмом подпространства $Q\setminus A$ на подпространство $Q\setminus B$. Мы опишем подробно построение трех первых членов этой последовательности, надеясь при этом, что читателю станет ясно, как продолжить построение.

I. Построение гомеоморфизма h_1. Возьмем некоторую малую окрестность V_1 компакта B. Мы желаем указать такой гомеоморфизм h_1: $Q \to Q$ гильбертова куба на себя, что $h_1(A) \subset V_1$. Опираясь на то, что $\mathbf{f}$ есть шейповое отображение, выберем натуральное число N_1, для которого найдется такая окрестность A_1 компакта A, что при $n \geqslant N_1$ существует гомотопия $f_n|_{A_1} \simeq f_{n+1}|_{A_1}$ (по V_1). По теореме 11.2 существует Z-вложение α_1: $A \to V_1$, гомотопное (по подпространству V_1) отображению $f_{N_1}|_A$. По теореме 11.1 мы можем продолжить Z-вложение α_1 до гомеоморфизма h_1: $Q \to Q$. См. рисунок.



Q

II. Построение гомеоморфизма h_2. Возьмем некоторую малую окрестность U_1 компакта A, удовлетворяющую условию $h_1(U_1) \subset V_1$. Мы желаем указать такой гомеоморфизм h_2: $Q \to Q$ гильбертова куба на себя, который совпадает с тождественным отображением на подпространстве $Q \setminus V_1$ и удовлетворяет условию $h_2 h_1(U_1) \supset B$. Опираясь на то, что g есть шейповое отображение, выберем натуральное число $N_2 \geqslant N_1$, для которого есть такая окрестность B_1 компакта B, что при $n \geqslant N_2$ существует гомотопия $g_n|_{B_1} \simeq g_{n+1}|_{B_1}$ (по U_1). По теореме 11.2 существует Z-вложение α_2: $B \to U_1$, гомотопное (по подпространству U_1) отображению $g_{N_2}|_B$. Тогда отображение $h_1\alpha_2$: $B \to h_1(U_1)$ является Z-вложением. Продолжим теперь Z-вложение $h_1\alpha_2$ до гомеоморфизма h_2': $Q \to Q$ гильбертова куба на себя, совпадающего с тождественным отображением на подпространстве $Q \setminus V_1$. По теореме 19.4 для этого нам достаточно показать, что Z-вло-

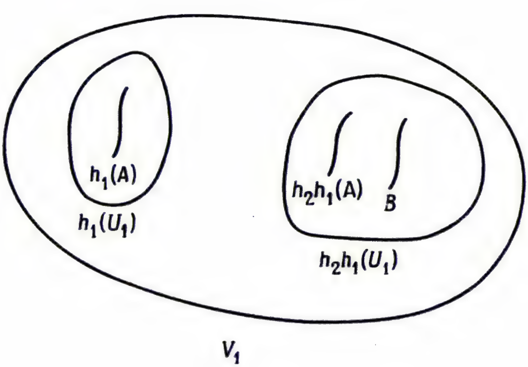
жение $h_1\alpha_2$ гомотопно (по подпространству V_1) отображению включения компакта B в подпространство V_1, которое, допуская некоторую вольность, мы обозначим id_B. (Мы применяем теорему 19.4 к Q-многообразию V_1 и произвольному его открытому покрытию, диаметр элементов которого стремится к нулю при приближении к границе $\mathrm{Bd}\,(V_1)$ множества V_1. Ср. это с построением изотопии G в доказательстве теоремы 17.2.)

Если мы выбрали число N_2 достаточно большим мы получаем нашу желаемую гомотопию $h_1\alpha_2 \simeq \mathrm{id}$ из следующих четырех:

$$(*) \qquad h_1\alpha_1 \simeq h_1 g_{N_2}|_B \simeq f_{N_1} g_{N_2}|_B \simeq f_{N_2} g_{N_2}|_B \simeq \mathrm{id} \quad (\text{по } V_1).$$

Существование первой гомотопии следует из нашего выбора Z-вложения α_2. По нашему выбору отображения h_1 имеем $h_1|_A \simeq f_{N_1}|_A$ (по V_1), и эта гомотопия может быть продолжена на некоторую окрестность компакта A, ибо открытое подпространство V_1 гильбертова куба является абсолютным окрестностным ретрактом, и, если число N_2 достаточно большое, мы получаем вторую гомотопию. Для существования третьей гомотопии достаточно, чтобы число N_2 было столь большим, чтобы множество $g_{N_2}(B)$ лежало в множестве A_1, и тогда получаем нашу гомотопию как ограничение гомотопии $f_{N_1}|_{A_1} \simeq f_{N_2}|_{A_1}$ (по V_1). Наконец, существование четвертой гомотопии следует из того, что $\mathbf{fg} = \mathbf{id}_B$.

Так как $h_1\alpha_2 \simeq \mathrm{id}$ (по V_1), мы можем продолжить Z-вложение $h_1\alpha_2$ до гомеоморфизма $h_2'\colon Q \to Q$ гильбертова куба на себя, совпадающего с тождественным отображением на подпространстве $Q \setminus V_1$. Возмем теперь $h_2 = (h_2')^{-1}$. См. рисунок.

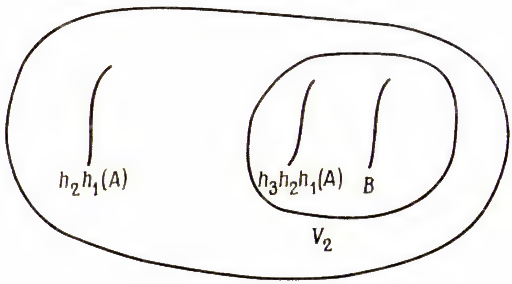


III. Построение гомеоморфизма h_3. Возьмем некоторую окрестность V_2 компакта B, удовлетворяющую условию $V_2 \subset h_2 h_1(U_1)$. Мы желаем указать такой гомеоморфизм h_3: $Q \to Q$ гильбертова куба на себя, который совпадает с тождественным отображением на подпространстве $Q \setminus h_2 h_1(U_1)$ и удовлетворяет условию $h_3 h_2 h_1(A) \subset V_2$. Опираясь на то, что **f** есть шейповое отображение, выберем натуральное число $N_3 \geqslant N_2$, для которого найдется такая окрестность $A_2 \subset A_1$ компакта A, что при $n \geqslant N_3$ $f_n|_{A_2} \simeq f_{n+1}|_{A_2}$ (по V_2). Возьмем Z-вложение α_3: $A \to V_2$, гомотопное (по подпространству V_2) отображению $f_{N_3}|_A$. Чтобы воспользоваться теоремой 19.4 (для получения нашего желаемого отображения h_3), мы должны показать, что Z-вложения α_3 и $h_2 h_1|_A$ гомотопны (по подпространству $h_2 h_1(U_1)$).

Если мы выбрали число N_3 достаточно большим, мы получаем эту гомотопию из следующих четырех:

$$(*\ *)\qquad h_2'\alpha_3 \simeq h_2' f_{N_3}|_A \simeq h_1 g_{N_2} f_{N_3}|_A \simeq$$
$$\simeq h_1 g_{N_3} f_{N_3}|_A \simeq h_1|_A \quad (\text{по } h_1(U_1)).$$

(Здесь, как и в пункте II, $h_2' = (h_2)^{-1}$.) Обоснование существования гомотопий $(*\ *)$ аналогично обоснованию существования гомотопий $(*)$. Отметим только, что четвертая гомотопия следует из шейповой эквивалентности $\mathbf{gf} \simeq \mathbf{id}_A$. Таким образом, $\alpha_3 \simeq h_2 h_1|_A$ (по $h_2 h_1(U_1)$) и по теореме 19.4 существует гомеоморфизм h_3: $Q \to Q$ гильбертова куба на себя, который совпадает с тождественным отображением на подпространстве $Q \setminus h_2 h_1(U_1)$ и с отображением α_3 на компакте A. См. рисунок.



$h_2h_1(U_1)$

Теперь должно быть ясно, как продолжить построение, начатое выше в пунктах I—III. Мы должны так выбрать последовательность окрестностей $\{U_n\}$ компакта A, последовательность окрестностей $\{V_n\}$ компакта B и последовательность гомеомор-

физмов $\{h_n\}$ гильбертова куба Q на себя, чтобы выполнялись условия:

(1) $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$,

(2) $B = \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n$,

(3) $h_i \ldots h_2 h_1(U_n) \subset V_n$ при $i \geqslant 2n-1$,

(4) $h_i \ldots h_2 h_1(U_n) \supset V_{n+1}$ при $i \geqslant 2n$,

(5) $h_i|_{Q \setminus V_n} = \mathrm{id}$ при $i \geqslant 2n$,

(6) $h_i|_{Q \setminus h_{2n} \ldots h_2 h_1(U_n)} = \mathrm{id}$ при $i \geqslant 2n+1$.

Из этих условий следует, что $h = \lim_{n \to \infty} h_n \ldots h_2 h_1|_{Q \setminus A}$ есть гомеоморфизм подпространства $Q \setminus A$ на подпространство $Q \setminus B$.

Опущенные детали читатель восстановит самостоятельно. ■

Замечания

Доказательство теоремы о дополнениях взято из работы Чепмэна [12]. Возможность получения этого результата была подсказана автору Р. Д. Андерсоном в 1970 г. после того, как автору удалось доказать, что дополнения в гильбертовом кубе к двум Z-множествам одного гомотопического типа гомеоморфны. В работе Зибенмана [45] дано доказательство теоремы о дополнениях, опирающееся на технику коллапсирования.

Весной 1971 г. М. Браун задал автору вопрос о возможности получения конечномерного аналога теоремы. Это было сделано Чепмэном в [13], но теперь имеются более точные результаты. См., например, статью Венема [48].

VII. ПОЧТИ ГОМЕОМОРФИЗМЫ И ТЕОРЕМА СУММЫ

Целью настоящей главы является доказательство теорем 26.1 и 27.4. Первая содержит условие, необходимое и достаточное для того, чтобы произвольное отображение было почти гомеоморфизмом. Эта теорема применяется для получения второго основного результата, теоремы суммы, в которой утверждается, что если компакт $Y = M_1 \cup M_2$ есть объединение двух своих замкнутых подпространств M_1 и M_2, которые, как и их пересечение $M_1 \cap M_2$, являются Q-многообразиями, и пересечение $M_1 \cap M_2$2 есть к тому же Z-множество пространства M_1, то пространство $Y \times Q$ есть Q-многообразие. Этот второй результат является определяющим для глав VIII—XII.

§ 26. Почти гомеоморфизмы. Напомним, что в § 1 мы назвали отображение f: $X \to Y$ пространства X в пространство Y *почти гомеоморфизмом,* если для любого открытого покрытия $\mathcal{U}$ пространства Y найдется гомеоморфизм h: $X \to Y$, $\mathcal{U}$-близкий к отображению f. Наш очередной результат — сжимающий критерий, известный как «сжимающий критерий Бинга».

Для удобства мы сформулируем его в терминах почти гомеоморфизмов. Он будет нами использован также в гл. XIV.

26.1. Теорема. *Собственное отображение p: $X \to Y$ пространства X на пространство Y является почти гомеоморфизмом тогда и только тогда, когда для любых открытых покрытий $\mathcal{U}$ пространства X и $\mathcal{V}$ пространства Y существует такой гомеоморфизм h: $X \to X$, что отображение ph $\mathcal{V}$-близко отображению p и всякое множество вида $hp^{-1}(y)$ лежит в некотором элементе покрытия $\mathcal{U}$.*

Доказательство. Предположим сначала, что отображение p является почти гомеоморфизмом и $\mathcal{U}$ есть открытое покрытие пространства X, $\mathcal{V}$ есть открытое покрытие пространства Y. Возьмем открытое покрытие $\mathcal{V}'$ пространства Y, звездно вписанное[1] в покрытие $\mathcal{V}$ (см. [24, стр. 167]). Если f, g: $X \to Y$ —

[1] То есть для любой точки $y \in Y$ найдется элемент V покрытия $\mathcal{V}$, содержащий множество $\cup\{V' \in \mathcal{V}' \mid \mathcal{V}' \ni y\}$.—*Прим. перев.*

гомеоморфизмы, $\mathscr{V}'$-близкие отображению p, то $h=g^{-1}f$: $X\to X$ есть гомеоморфизм и отображение ph $\mathscr{V}$-близко отображению p. Возьмем любой такой гомеоморфизм g и выберем гомеоморфизм f столь близким к отображению p, чтобы всякое множество вида $hp^{-1}(y)$ лежало в некотором элементе покрытия $\mathscr{U}$.

Для доказательства обратной импликации рассмотрим сначала компактный случай. Мы построим отображение f: $X\to X$, для которого pf^{-1}: $X\to Y$ есть гомеоморфизм, близкий к отображению p. Мы построим f как предел вида $f=\lim\limits_{n\to\infty} h_1h_2\ldots h_n$, где каждое из отображений h_n является гомеоморфизмом пространства X на себя.

По нашему предположению мы можем найти такой гомеоморфизм h_1: $X\to X$ пространства X на себя, что $d(ph_1, p)<\frac{1}{2}$ и для любой точки $y\in Y$ $\operatorname{diam} h_1p^{-1}(y)<\frac{1}{2}$. (Здесь буквой d мы обозначаем и метрику пространства X, и метрику пространства Y.) Возьмем теперь $\varepsilon_2>0$ и найдем такой гомеоморфизм h_2: $X\to X$ пространства X на себя, что $d(ph_2, p)<\varepsilon_2$ и для любой точки $y\in Y$ $\operatorname{diam} h_2p^{-1}(y)<\varepsilon_2$. Если число $\varepsilon_2>0$ взято достаточно малым, то будут выполнены дополнительно условия $d(h_1, h_1, h_2)<\frac{1}{2}$, $d(ph_1h_2, p)<\frac{1}{2}$ и для любой точки $y\in Y$ $\operatorname{diam} h_1h_2p^{-1}(y)<\frac{1}{2^2}$. Продолжая таким образом, строим гомеоморфизмы $h_1, h_2, \ldots$ пространства X на себя, для которых

$$d(h_1\ldots h_n, h_1\ldots h_nh_{n+1})<\frac{1}{2^n},$$

$$\text{для}\quad n\geqslant m \qquad d(ph_m\ldots h_n, p)<\frac{1}{2^m},$$

$$\text{для}\quad y\in Y \qquad \operatorname{diam} h_1\ldots h_np^{-1}(y)<\frac{1}{2^n}.$$

Так как последовательность $\{h_1\ldots h_n\}_{n=1}^{\infty}$ является последовательностью Коши, то мы получаем отображение

$$f=\lim_{n\to\infty} h_1\ldots h_n$$

пространства X на себя. Докажем, что pf^{-1}: $X\to Y$ есть гомеоморфизм.

Чтобы убедиться в этом, достаточно показать, что

(1) $p(x_1)\neq p(x_2)\Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$,

(2) для любой точки $y\in Y$ множество $f(p^{-1}(y))$ состоит из одной точки.

В первом случае возьмем m столь большим, чтобы для любого $n \geqslant m$ выполнялось неравенство

$$d(ph_m \ldots h_n(x_1), ph_m \ldots h_n(x_1)) \geqslant \frac{d(p(x_1), p(x_2))}{2}).$$

Тогда $(h_1 \ldots h_{m-1})^{-1} f(x_1) \neq (h_1 \ldots h_{m-1})^{-1} f(x_2)$ и тем более $f(x_1) \neq f(x_2)$. Во втором случае мы должны лишь заметить, что

$$\operatorname{diam} fp^{-1}(y) = \lim_{n \to \infty} \operatorname{diam} h_1 \ldots h_n p^{-1}(y) = 0.$$

Таким образом, pf^{-1} есть гомеоморфизм. Наконец, очевидно, что если дано $\varepsilon > 0$, то отображение f может быть построено так, что $d(pf^{-1}, p) < \varepsilon$. Поэтому отображение p является почти гомеоморфизмом.

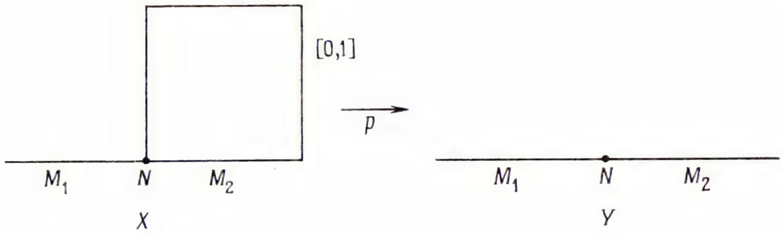
Чтобы рассмотреть некомпактный локально компактный случай, рассмотрим продолжение $\tilde{p}$: $\tilde{X} \to \tilde{Y}$ отображения p на одноточечные расширения $\tilde{X} = X \cup \{\infty\}$ и $\tilde{Y} = Y \cup \{\infty\}$ пространств X и Y соответственно $\tilde{p}(\infty) = \infty$. Существует отображение $\tilde{f}$: $\tilde{X} \to \tilde{X}$ ($\tilde{f}(\infty) = \infty$), такое, что при $\tilde{p}(x_1) \neq \tilde{p}(x_2) \Rightarrow \tilde{f}(x_1) \neq \tilde{f}(x_1)$ и для любой точки $y \in Y$ множество $\tilde{f}\tilde{p}^{-1}(y)$ состоит из одной точки. Зададим теперь отображение f: $X \to X$ как ограничение отображения $\tilde{f}$ на подпространство $X \subset \tilde{X}$. Отображение pf^{-1}: $X \to Y$ есть гомеоморфизм пространства X на пространство Y. Очевидно, отображение pf^{-1} может быть выбрано сколь угодно близким к отображению p (ср. с некомпактным случаем в доказательстве теоремы 5.1). ∎

26.2. Замечание. Гомеоморфизм h: $X \to X$ в формулировке теоремы 26.1 мы называем ***сжимающим гомеоморфизмом***. Он уменьшает размеры элементов полунепрерывного сверху разбиения $D = \{p^{-1}(y) \mid y \in Y\}$ пространства X.

§ 27. Теорема суммы. Прежде всего введем обозначения, которые будут использованы нами ниже в лемме 27.1 и теореме 27.3. Пусть M_2 есть компактное Q-многообразие и в нем лежит компактное Q-многообразие $N \subset M_2$. Рассмотрим пространство $Y = M_1 \cup M_2$, получающееся склеиванием Q-многообразий $M_1 = N \times [0, 1]$ и M_2, при котором отождествляются точки $(n, 1) \in N \times \{1\} \subset N \times [0, 1]$ и $n \in N \subset M_2$. Имеем $M_1 \cap M_2 = N \equiv \equiv N \times \{1\}$. Пусть

$$X = (M_1 \times \{0\}) \cup (M_2 \times [0, 1]) \subset Y \times [0, 1]$$

и p: $X \to Y$ есть ограничения на подпространство X проектирования произведения на первый сомножитель. См. рисунок.



Наш основной результат (27.3) утверждает, что $p \times \mathrm{id}_Q$: $X \times Q \to Y \times Q$ является почти гомеоморфизмом. Из него следует (27.4), утверждение, сделанное в начале этой главы. Прежде чем доказать 27.3, полезно было бы установить следующие две леммы. Первая является частным случаем 27.3, в то время как вторая используется в качестве промежуточного результата между этим частным случаем и общим случаем.

27.1. Лемма. *Если $N \subset M_2$ — Z-множество, то p: $X \to Y$ является почти гомеоморфизмом.*

Доказательство. В силу устойчивости (15.1) существует гомеоморфизм f: $M_2 \times [0, 1] \to M_2$, который близок к проекции π: $M_2 \times [0, 1] \to M_2$. Тогда

$$f \mid N \times \{0\}: N \times \{0\} \to M_2$$

— Z-вложение и поскольку $N \subset M_2$ является Z-множеством, то

$$\pi \mid N \times \{0\}: N \times \{0\} \to M_2$$

является также Z-вложением. Так как f близко к π, мы можем получить малую гомотопию, объединяющую эти вложения.

В силу 19.4 эта малая гомотопия дает нам гомеоморфизм g: $M_2 \to M_2$, такой, что $gf \mid N \times \{0\} = \pi \mid N \times \{0\}$ и g близко к тождественному отображению. Гомеоморфизм $gf \mid M_2 \times [0, 1] \to M_2$ продолжает тогда тождественное отображение до гомеоморфизма h: $X \to Y$, близкого к p.

27.2. Лемма. *Пусть M есть компактное Q-многообразие. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такой гомеоморфизм*

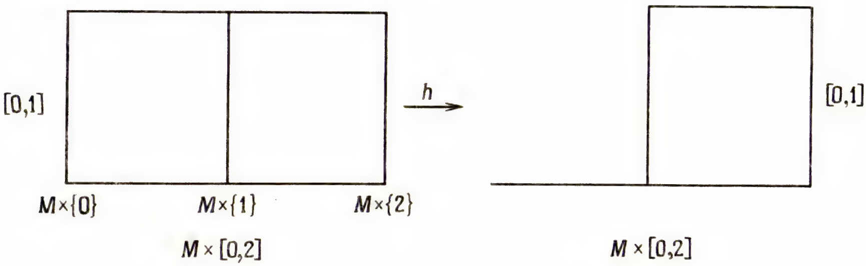
$$h: M \times [0, 2] \times [0, 1] \to (M \times [0, 1] \times \{0\}) \cup (M \times [1, 2] \times [0, 1]),$$

что

(1) *он сдвигает точки множества* $M \times [1, 2] \times [0, 1]$ *не более чем на ε,*

(2) *он изменяет координаты точек по сомножителю* $M \times [0, 2]$ *не более чем на ε,*

(3) *он совпадает с тождественным отображением на подпространстве* $M \times \{2\} \times [0, 1]$.



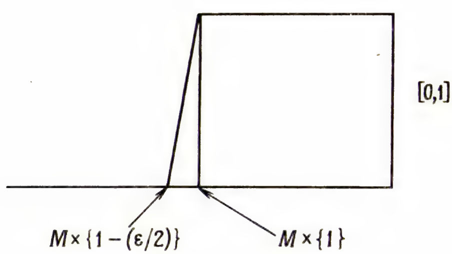
Доказательство. Мы построим гомеоморфизм h как композицию двух гомеоморфизмов $h = h_2 h_1$. Пусть отображение r: $M \times [0, 2] \to [0, 1]$ задается условием:

$$r(m, t) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1 - \dfrac{\varepsilon}{2}, \\ \dfrac{2t + \varepsilon - 2}{\varepsilon} & \text{при} \quad 1 - \dfrac{\varepsilon}{2} \leqslant t \leqslant 1, \\ 1 & \text{при} \quad 1 \leqslant t \leqslant 2. \end{cases}$$

Рассмотрим произведение с переменным слоем

$$(M \times [0, 2]) \times_r [0, 1] = \cup \{ \{x\} \times [0, r(x)] \mid x \in M \times [0, 2] \} \subset M \times \times [0, 2] \times [0, 1].$$

См. рисунок.



По аналогии с теоремой 14.2 (как кратко объяснено в доказательстве теоремы 15.1) мы можем найти гомеоморфизм

$$h_1: M \times [0, 2] \times [0, 1] \to (M \times [0, 2]) \times_r [0,1],$$

совпадающий с тождественным отображением на подпростран-

стве $M \times [1, 2] \times [0, 1]$ и изменяющий координаты точек по сомножителю $M \times [0, 2]$ не более чем на $\frac{\varepsilon}{2}$.

Пусть теперь

$$h_2\colon (M \times [0, 2]) \times_r [0, 1] \to (M \times [0, 1] \times \{0\}) \cup (M \times [1, 2] \times [0, 1]),$$

есть гомеоморфизм, линейно отображающий отрезок

$$((M \times [0, 2] \times_r [0, 1]) \cap (\{m\} \times [0, 2] \times \{t\})$$

на отрезок $\{m\} \times [1, 2] \times t$ при любых $m \in M$ и $t \in [0, 1]$. Как легко видеть, гомеоморфизм $h = h_2 h_1$ удовлетворяет всем нашим условиям. ■

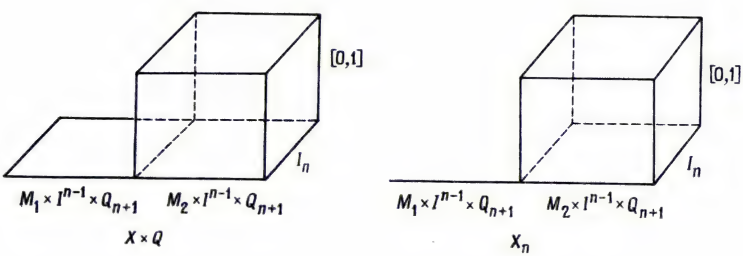
27.3. Теорема. *Отображение $p \times \mathrm{id}_Q\colon X \times Q \to Y \times Q$ является почти гомеоморфизмом.*

Доказательство. Мы покажем сейчас, что находимся в условиях теоремы 26.1. Это означает, что мы должны построить сжимающий гомеоморфизм для отображения $p \times \mathrm{id}$. Наша стратегия будет заключаться в использовании леммы 27.2 для замены пространства $X \times Q$ гомеоморфным ему подпространством (обозначаемым ниже X_n) и в последующем использовании леммы 27.1 для построения сжимающего гомеоморфизма для подпространства X_n. В результате мы получим требуемый гомеоморфизм пространства $X \times Q$.

Рассмотрим для всякого натурального числа n подпространство

$$X_n = ((M_1 \times \{0\}) \times I^{n-1} \times \{-1\} \times Q_{n+1}) \cup \cup ((M_2 \times [0, 1]) \times Q) \subset X \times Q.$$

Пространства $X \times Q$ и X_n изображены на рисунке.



Очевидно, что $X \times Q = X_n \cup ((M_1 \times \{0\}) \times Q)$. Отметим еще, что обращенная к нам плоскость рисунка изображает пространство

$X\times I^{n-1}\times Q_{n+1}$. В нижней части рисунка для пространства $X\times Q$ изображено пространство $Y\times Q$. Будет обозначать Y_n соответствующую часть пространства X_n, а именно

$$Y_n=(M_1\times I^{n-1}\times\{-1\}\times Q_{n+1})\cup(M_2\times Q)\subset Y\times Q.$$

По лемме 27.1 отображение $p\times \mathrm{id}\,|_{X_n}\colon X_n\to Y_n$ является почти гомеоморфизмом. (Чтобы можно было применить лемму 27.1, мы должны лишь заметить, что подпространство $M_1\times I^{n-1}\times \times\{-1\}\times Q_{n+1}$ пересекается с подпространством $M_2\times Q$ по Z-множеству.) По теореме 26.1 существует сжимающий гомеоморфизм $h_n\colon X_n\to X_n$ пространства X_n на себя для отображения $p\times\mathrm{id}\,|_{X_n}$. Воспользуемся теперь гомеоморфизмами h_n для построения сжимающих гомеоморфизмов для отображения $p\times\mathrm{id}$.

Из леммы 27.2 следует, что для любого $\varepsilon>0$ существует такой гомеоморфизм $f_\varepsilon\colon X\times Q\to X_n$ и произведения $X\times Q$ на подпространство X_n, что

(1) он сдвигает точки подпространства $M_2\times[0,\ 1]\times Q$ не более чем на ε,

(2) он изменяет координаты точек по сомножителю $(X\times I^{n-1}\times Q_{n+1})$ (изображенному на рисунке на обращенной к нам плоскости) не более чем на ε. (Чтобы можно было применить лемму 27.2, заметим, что подпространство $M_1\times\{0\}\times I^{n-1}\times Q_{n+1}$ пересекает подпространство $M_2\times[0,\ 1]\times I^{n-1}\times Q_{n+1}$ по Z-множеству (оба они изображены на обращенной к нам плоскости рисунка), которое по теореме 16.2 обладает воротником в подпространстве $M_2\times[0,\ 1]\times I^{n-1}\times Q_{n+1}$. Следовательно, существует открытое вложение

$$\varphi\colon N\times[0,\ 2)\times I^{n-1}\times Q_{n+1}\to X\times I^{n-1}\times Q_{n+1},$$

которое на подпространстве $N\times[0,\ 1]\times I^{n-1}\times Q_{n+1}$ есть просто включение

$$N\times[0,\ 1]\times\{0\}\times I^{n-1}\times Q_{n+1}=$$
$$=M_1\times\{0\}\times I^{n-1}\times Q_{n+1}\subset X\times I^{n-1}\times Q_{n+1},$$

а на подпространстве $N\times[1,\ 2)\times I^{n-1}\times Q_{n+1}$ совпадает с воротником множества $N\times\{0\}\times I^{n-1}\times Q_{n+1}$ в подпространстве $M_2\times[0,\ 1]\times I^{n-1}\times Q_{n+1}$. (Роль сомножителя $[0,\ 1]$ формулировки леммы 27.2 играет отрезок I_n.)

Искомый сжимающий гомеоморфизм для отображения $p\times\mathrm{id}$ мы ищем теперь в виде

$$h=f_\varepsilon^{-1}h_nf_\delta,$$

где число n достаточно велико, числа $\varepsilon, \delta > 0$ достаточно малы. В выборе этих чисел мы должны быть точны. Опишем условия, которые мы на них налагаем.

1. Выберем сначала число n так, чтобы гомеоморфизм h_n был сжимающим гомеоморфизмом для отображения $p \times \mathrm{id}\,|_{X_n}$: $X_n \to Y_n$. Он «сжимает» отрезки вида $\{m\} \times [0,\ 1] \times \{q\}$, где $m \in M_2$, $q \in Q$.

2. Выберем число $\varepsilon > 0$ так, чтобы гомеоморфизм f_ε сдвигал точки пространства $X \times Q$ не более чем на удвоенную длину отрезка I_n, т.е. не более чем на $\frac{4}{2^n}$. Отображение $f_\varepsilon^{-1} h_n$ сохраняет свойство сжимать отрезки вида $\{m\} \times [0,\ 1] \times \{q\}$.

3. Выберем число $\delta > 0$ так, чтобы были выполнены условия: $d(f_\delta, \mathrm{id}) < \frac{4}{2^n}$, и любое множество вида $f_\delta(\{m\} \times [0,\ 1] \times \{q\})$, где $m \in M_2$ и $q \in Q$, столь близко к множеству $\{m\} \times [0,\ 1] \times \{q\}$, что оно также сжимается отображением f_n. Таким образом, отображение $f_\varepsilon^{-1} h_n f_\delta$ сжимает множества вида $\{m\} \times [0,\ 1] \times \{q\}$, которые и являются полными прообразами точек для отображения $p \times \mathrm{id}$.

4. Заметим, наконец, что для уже выбранного значения n отображения h_n, f_ε и f_δ могут быть выбраны так, что координаты точек по сомножителю $(Y \times I^{n-1} \times Q_{n+1})$ изменяются под действием отображения $f_\varepsilon^{-1} h_n f_\delta$ сколь угодно мало. Это означает, что для больших значений отображение $(p \times \mathrm{id})(f_\varepsilon^{-1} h_n f_\delta)$ может быть сделано близким к отображению $p \times \mathrm{id}$. ■

27.4 Теорема. *Пусть пространство $Y = M_1 \cup M_2$ есть объединение своих компактных подпространств M_1 и M_2, которые, как и их пересечение $M_1 \cap M_2$, являются Q-многообразиями, и пересечение $M_1 \cap M_2$ есть к тому же Z-множество подпространства M_1. Тогда пространство $Y \times Q$ также является Q-многообразием. Более того, если $M_1 = N \times [0,\ 1]$, где $M_1 \cap M_2 = N \times \{1\}$, и U есть произвольная окрестность множества $N \times \{1\}$, то вложение $M_2 \times Q \hookrightarrow Y \times Q$ гомотопно* rel $(M_2 \setminus U) \times Q$ *гомеоморфизму между этими пространствами.*

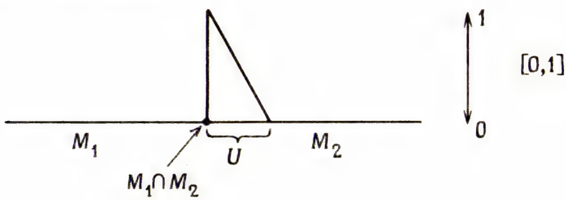
Доказательство. Так как пересечение является Z-множеством подпространства M_1, найдется замкнутая окрестность G множества $M_1 \cap M_2$ в подпространстве M_1, гомеоморфная произведе-

нию $(M_1 \cap M_2) \times [0, 1]$, где множество $M_1 \cap M_2$ отождествляется с множеством $(M_1 \cap M_2) \times \{1\}$. Теперь применяем теорему 27.3 и заключаем, что произведение $(G \cup M_2) \times Q$ гомеоморфно пространству

$$((G \times \{0\}) \cup \{(M_2 \times [0, 1])) \times Q,$$

которое является Q-многообразием, так как «середина», т.е. множество $(M_1 \cap M_2) \times \{0\} \times Q$, является Q-многообразием и Z-множеством в каждом из подпространств и, следовательно, обладает воротником в обе стороны. Поэтому произведение $Y \times Q$ является Q-многообразием.

Для доказательства оставшейся части теоремы несколько видоизменим теорему 27.3. Пусть $r: M_2 \to [0, 1]$ есть функция, для которой $r^{-1}((0, 1]) \subset U$ и $r(M_1 \cap M_2) = \{1\}$. Рассмотрим произведение с переменным слоем $M_2 \times_r [0, 1] \subset M_2 \times [0,1]$. Оно является Q-многообразием, что доказывается аналогично теореме 14.1. Рассмотрим подпространство $X^* = (M_1 \times \{0\}) \cup (M_2 \times_r [0, 1])$ пространства X, описанного в начале параграфа. Пространство X^* показано на рисунке.



Как и в доказательстве теоремы 27.3, ограничение отображения $p \times \mathrm{id}_Q$ на подпространство $X^* \times Q$: $(p \times \mathrm{id}_Q)|_{X^* \times Q} X^* \times \times Q \to Y \times Q$ может быть аппроксимировано гомеоморфизмами, совпадающими с тождественным отображением на подпространстве $(M_2 \setminus U) \times \{0\} \times Q$. Пусть h: $X^* \times Q \to Y \times Q$ — такой гомеоморфизм. Так как множество $(M_1 \cap M_2) \times \{0\}$ является Z-множеством подпространства $M_2 \times_r [0, 1]$, оно обладает воротником в этом подпространстве. Используя этот воротник, легко показать, что вложение $M_2 \times_r [0, 1] \times Q \hookrightarrow X^* \times Q$ гомотопёно $\mathrm{rel}(M_2 \setminus U) \times \{0\} \times Q$ некоторому гомеоморфизму. Гомеоёморфизм h возвращает эту гомотопию в пространство $Y \times Q$, что нам и требуется. ■

27.5. Замечание. В теореме 27.4 требование компактности Q-многообразий M_1 и M_2 может быть опущено. Вместо него достаточно предположить, что множество $M_1 \cap M_2$ является замкнутым Zмножеством подпространства M_2. Это повлечет

лишь незначительные изменения в доказательстве. Однако пока мы не нуждаемся в этом. Позже, в гл. XIV, мы получим это утверждение как частный случай более общей теоремы.

Замечания

§ 26. Сжимающий критерий заимствован из статьи Бинга [7], использовавшего его для построения примера, не являющегося многообразием пространства X, для которого $X \times R \cong R^4$.

§ 27. Теорема суммы 27.4 была сначала доказана Вестом [50], использовавшим для ее получения тонкую технику внутренней аппроксимации. Еще в 1968 г. Р. Д. Андерсон умел доказывать, что буква T есть Q-фактор, т.е. $T \times Q \cong Q$, но не увидел, как можно обобщить этот результат. Данное здесь доказательство придумано автором в начале 1974 г. Без больших трудностей его можно обобщить и доказать теорему Веста о цилиндре отображения [51].

Отметим еще, что недавно М. Хэндел [27] получил следующее обобщение теоремы 27.4. *Пусть пространство Y является объединением компактных Q-многообразий M_1 и M_2 и пересечение $M_1 \cap M_2$ является Q-многообразием и Z-множеством подпространства M_1.* Тогда пространство Y является Q-многообразием. Р. Шер недавно показал, что требование, что пересечение $M_1 \cap M_2$ является Z-множеством в одном из слагаемых, не может быть отброшено [40].

VIII. ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕМЫ СУММЫ

В этой главе мы исследуем, что получается, если полиэдр X умножить на гильбертов куб Q. В теореме 28.1 мы покажем, что пространство $X \times Q$ является Q-многообразием. В § 29 мы напомним некоторые факты, связанные с понятием простого гомотопического типа, и докажем в теореме 29.4, что если отображение f: $X \to Y$ компактных полиэдров X и Y является простой гомотопической эквивалентностью, то отображение $f \times \mathrm{id}_Q$: $X \times Q \to Y \times Q$ гомотопно гомеоморфизму. § 30 будет посвящен аналогу этой теории для некомпактного случая.

§ 28. Q-M-ФАКТОРЫ. Пространство F называется *Q-M-фактором*, если его произведение $F \times Q$ на гильбертов куб является Q-многообразием. Из теории абсолютных окрестностных ретрактов следует, что в этом случае пространство F обязано быть абсолютным окрестностным ретрактом. В главе XIV мы докажем, что верно и обратное: всякий абсолютный окрестностный ретракт является Q-M-фактором. Сейчас же мы получим следующий более слабый результат.

28.1 ТЕОРЕМА. *Всякий полиэдр является Q-M-фактором.*

Доказательство. Пусть X есть полиэдр. Так как всякая его точка лежит в некоторой компактной полиэдральной окрестности, мы можем дополнительно предположить, что полиэдр X компактен. Пусть X_n есть n-мерный остов полиэдра X. Отметим, что если $\dim X = k$, то $X_k = X$. Мы докажем индукцией по размерности остовов, что произведение $X_n \times Q$ является Q-многообразием. Заметим прежде всего, что нульмерный остов X_0 есть конечное множество вершин нашего полиэдра и поэтому произведение $X_0 \times Q$ является Q-многообразием.

Предположим теперь, что произведение $X_n \times Q$ есть Q-многообразие, и докажем, что произведение $X_{n+1} \times Q$ также является Q-многообразием. Имеем

$$X_n = X_n \cup (\sigma_1 \cup \sigma_2 \cup \ \ldots \ \cup \sigma_p),$$

где $\{\sigma_i\}$ — множество всех $(n+1)$-мерных клеток полиэдра X.

Каждая из них пересекает n-мерный остов X_n по своей комбинаторной границе. Таким образом, пересечение $\sigma_i \cap X_n$ является, очевидно, Q-M-фактором (ибо это есть n-мерная сфера) и вложено в подпространство σ_i в качестве Z-множества. Мы предположили, что пространство $X_n \times Q$ является Q-многообразием, поэтому из теоремы суммы (27.4) следует, что пространство

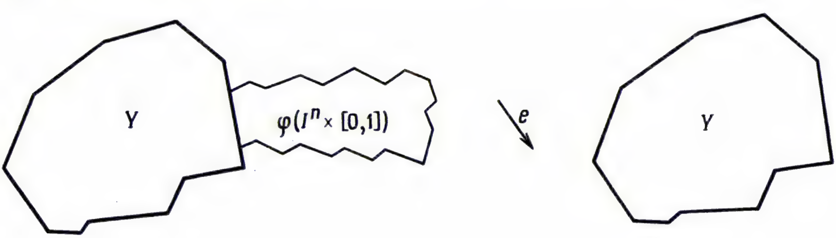
$$X_{n+1} \times Q \cong (X_{n+1} \times Q) \times Q = (X_n \times Q \cup (\sigma_1 \cup \ . \ . \ . \ \cup \sigma_p) \times Q) \times Q$$

также является Q-многообразием. Этим завершается шаг индукции и вместе с ним и доказательство теоремы. ■

§ 29. Простая гомотопия. В этом параграфе мы изложим основные факты теории простой гомотопии для компактных полиэдров, необходимые для дальнейшего. В остальном для знакомства с теорией рекомендуем книгу Коэна [22].

Рассмотрим компактные полиэдры X и Y. Мы говорим, что полиэдр X *сдавливается* (*коллапсирует*) на полиэдр Y *элементарным вдавливанием* (*коллапсом*) (пишем $X \searrow^e Y$), если для некоторого натурального числа n существует такое кусочно-линейное вложение φ: $I^n \times [0, \ 1] \to X$, что $X = Y \cup \varphi(I^n \times [0, \ 1])$ и $\varphi(I^n \times [0, \ 1]) \cap Y = \varphi(I^n \times \{1\})$. (Напомним, что кусочная линейность означает симплициальность по отношению к некоторому симплициальному подразделению.) Таким образом, полиэдр X может быть получен из полиэдра Y кусочно-линейным приклеиванием некоторой клетки по ее свободной грани. Про это же мы говорим, что пространство Y выдавливается на пространство X элементарным выдавливанием, и пишем $Y \nearrow^e X$.

Отображение f: $X \to Y$ компактного полиэдра X в компактный полиэдр Y называется *элементарным выдавливанием*, если оно гомотопно вложению $X \hookrightarrow Y$, для которого $X \nearrow^e Y$. Отображение g: $Y \to X$ называется *элементарным вдавливанием* (*элементарным коллапсом*), если $Y \searrow^e X$, и оно гомотопно ретракции h: $X = Y \cup \varphi(I^n \times [0, \ 1]) \to Y$ пространства X на пространство Y заданной формулой $h(\varphi(r,t)) = \varphi(r, \ 1)$, где $r \in I^n$, $t \in [0, \ 1]$, и, конечно, $h|_Y = \mathrm{id}_Y$. Отметим, что элементарное вдавливание и элементарное выдавливание являются гомотопическими эквивалентностями.



Отображение $f\colon X\to Y$ компактного полиэдра X в компактный полиэдр Y называется *простой гомотопической эквивалентностью* (сокращенно п.г.э.), если оно гомотопно

$$X\xrightarrow{f_1}X_1\xrightarrow{f_2}X_2\to\ \dots\ \xrightarrow{f_n}X_n\xrightarrow{f_{n+1}}Y,$$

в которой каждое пространство X_i является компактным полиэдром и каждое отображение f_i является либо элементарным вдавливанием, либо элементарным выдавливанием. Таким образом, п.г.э. есть гомотопическая эквивалентность весьма специальной природы. Именно, она разлагается в конечное число простых перестроек. Следующее утверждение является простым следствием определения.

29.1. Теорема. *Пусть $f\colon X\to Y$ и $g\colon Y\to Z$-отображения компактных полиэдров и отображение h гомотопно композиции $g\ f\colon X\to Z$. Если какие-то два из отображений f, g, и h являются п.г.э., то таковым же будет и третье отображение.* ■

Следующая теорема суммы для п.г.э. не является легким следствием определений, однако она имеет приемлемое геометрическое доказательство, не использующее алгебры. См. [42, стр. 482] по поводу геометрии и [22, стр. 76] по поводу алгебры. На самом деле геометрия в неявном виде присутствует и в [22, § 6].

Этот результат нам не понадобится до гл. XII.

29.2. Теорема. *Пусть компактные полиэдры $X=X_1\cup X_2$ и $Y=Y_1\cup Y_2$ представлены в виде объединения своих компактных подполиэдров X_1, X_2 и Y_1, Y_2 соответственно. Пусть отображение $f\colon X\to Y$ таково, что $f(X_i)\subset Y_i$, $i=1, 2$, и*

(1) *ограничение $f|_{X_1}\colon X_1\to Y_1$ является п.г.э.,*

(2) *ограничение $f|_{X_2}\colon X_2\to Y_2$ является п.г.э.,*

(3) *ограничение $f|_{X_1\cap X_2}\colon (X_1\cap X_2)\to(Y_1\cap Y_2)$ является простой гомотопической эквивалентностью.*

Тогда отображение f является п.г.э. ■

Мы будем пользоваться также следующим результатом, требующим алгебраического исследования понятия п.г.э., см. [22, стр. 43]. Он не понадобится нам до гл. X.

29.3. Теорема. *Пусть $f\colon X\to Y$ — гомотопическая эквивалентность между компактными полиэдрами.*

(i) *Если фундаментальная группа каждой компоненты связности пространства X является свободной или свободной абелевой, то отображение f есть п.г.э.*

(ii) *Отображение f не всегда является п.г.э.* ■

Докажем, наконец, результат, упомянутый в начале этой главы. Он будет очень важен для нас в гл. X.

29.4. Теорема. *Пусть f: $X \to Y$ — п.г.э. компактных полиэдров X и Y. Тогда отображение $f \times \mathrm{id}_Q$: $X \times Q \to Y + Q$ гомотопно гомеоморфизму.*

Доказательство. Учитывая определение п.г.э., достаточно рассмотреть случай, когда отображение f является элементарным выдавливанием. Мы будем считать, что полиэдр Y получен из полиэдра X кусочно-линейным приклеиванием клетки к полиэдру X по свободной грани и f есть соответствующее отображение вложения $X \hookrightarrow Y$. Мы можем, следовательно, записать, что

$$Y = X \cup (I^n \times [0, 1]), \quad \text{где} \quad X \cap (I^n \times [0, 1]) = I^n \times \{1\}.$$

Так как всякий полиэдр является Q-M-фактором, из теоремы 27.4 немедленно следует, что вложение $X \times Q \hookrightarrow Y \times Q$ гомотопно гомеоморфизму. ■

29.5. Следствие. *Пусть X и Y — компактные полиэдры, фундаментальная группа каждой компоненты пространства X является свободной или свободной абелевой и отображение f: $X \times Q \to Y \times Q$ есть гомотопическая эквивалентность. Тогда отображение f гомотопно гомеоморфизму.*

Доказательство. Рассмотрим отображение f_0: $X \to Y$, делающее следующую диаграмму коммутативной:

$$\begin{tikzcd} X \times Q \arrow[r, "f"] & Y \times Q \arrow[d, "\mathrm{proj}"] \\ X \arrow[u, "x0"] \arrow[r, "f_0"] & Y \end{tikzcd}$$

где $x0(x) = (x, 0)$.

Отображение f_0 является гомотопической эквивалентностью и по теореме 29.3 обязано быть п.г.э. По теореме 29.4 отображение $f_0 \times \mathrm{id}_Q$ гомотопно гомеоморфизму. Нам осталось заметить, что $f \simeq f_0 \times \mathrm{id}$. ■

§ 30. Бесконечная простая гомотопия. Покажем, как можно обобщить результаты § 29 на случай некомпактных полиэдров. Мы изложим сейчас некоторые факты о простой гомотопии для локально компактных полиэдров, которые обычно объединяются *в теорию бесконечной простой гомотопии* (см. [42] в связи с дальнейшими результатами).

Рассмотрим полиэдры X и Y. Мы говорим, что полиэдр X вдавливается на полиэдр Y (пишем $X \searrow Y$), если найдутся такие попарно непересекающиеся компактные подполиэдры $\{Z_i\}_{i=1}^{\infty}$ полиэдра X, что

(1) $X = Y \cup (\bigcup_{i=1}^{\infty} Z_i)$,

(2) каждое вложение $Z_i \cap Y \to Z_i$ представляется в виде конечной композиции элементарных выдавливаний в смысле § 29.

В этом же случае мы говорим, что полиэдр Y *выдавливается* на пространство X, и пишем $Y \nearrow X$.

Собственное отображение f: $X \to Y$ полиэдров X и Y называется *выдавливанием*, если оно собственно гомотопно вложению $X \hookrightarrow Y$ и $X \nearrow Y$. Собственное отображение g: $X \to Y$ называется *вдавливанием* (*коллапсом*), если $X \searrow Y$ и g собственно гомотопно ретракции $X \to Y$, задаваемой на каждом подпространстве Z_i в виде композиции ретракций, соответствующих элементарным вдавливаниям. Заметим, что вдавливания и выдавливания являются собственными гомотопическими эквивалентностями. (По этому поводу см. § 4 этой книги.)

Собственное отображение f: $X \to Y$ полиэдра X в полиэдр Y называется *бесконечной простой гомотопической эквивалентностью, если оно собственно гомотопно композиции*

$$X \xrightarrow{f_1} X_1 \to \ldots \to X_n \xrightarrow{f_{n+1}} Y,$$

где каждое из пространств X_i является полиэдром, а каждое из отображений f_i — вдавливанием или выдавливанием. Как и в компактном случае, бесконечная п.г.э. является весьма специальным случаем собственной гомотопической эквивалентности. Отметим также, что для компактных полиэдров X и Y отображение f: $X \to Y$ является простой гомотопической эквивалентностью тогда и только тогда, когда оно является бесконечной простой гомотопической эквивалентностью. Имеются некомпактные аналоги теорем 29.1, 29.2 и 29.4. Существует и некомпактный аналог теоремы 29.3, но его формулировка для нас слишком сложна.

30.1 Теорема. *Пусть f: $X \to Y$ и g: $Y \to Z$ — собственные отображения полиэдров и отображение h: $X \to Z$ собственно гомотопно композиции gf: $X \to Z$. Если какие-то два из отображений f, g и h являются бесконечными п.г.э., то таковым же будет и третье отображение.*

30.2. Теорема. *Пусть полиэдры $X = X_1 \cup X_2$ и $Y = Y_1 \cup Y_2$ представлены в виде объединения своих замкнутых подполиэд-*

ров X_1, X_2 *и* Y_1, Y_2 *соответственно. Пусть собственное отображение* $f\colon X \to Y$ *таково, что* $f(X_i) \subset Y_i$, $i = 1, 2$, *и*

(1) *ограничение* $f|_{X_1}\colon X_1 \to Y_1$ *является бесконечной п.г.э.,*

(2) *ограничение* $f|_{X_2}\colon X_2 \to Y_2$ *является бесконечной п.г.э.,*

(3) *ограничение* $f|_{X_1 \cap X_2}\colon X_1 \cap X_2 \to Y_1 \cap Y_2$ *является бесконечной п.г.э.*

Тогда отображение f *является п.г.э.* ■

30.3 Теорема. *Пусть* $f\colon X \to Y$ *— бесконечная п.г.э. полиэдров* X *и* Y. *Тогда отображение* $f \times \mathrm{id}_Q\colon X \times Q \to Y \times Q$ *собственно гомотопно гомеоморфизму.*

Доказательство. Учитывая определение бесконечной п.г.э., достаточно рассмотреть случай, когда отображение f является выдавливанием. Будем считать, что полиэдр Y представлен в виде $Y = X \cup (\bigcup_{i=1}^{\infty} Z_i)$ (см. определения в начале параграфа), отображение f является вложением, а каждое вложение $Z_i \cap X \hookrightarrow Z_i$ является композицией конечного числа элементарных выдавливаний. Так как компактные подполиэдры попарно не пересекаются, существуют компактные подполиэдры N_i полиэдра X, которые

(1) попарно не пересекаются,

(2) подполиэдр N_i является (замкнутой) окрестностью подполиэдра $Z_i \cap X$ в полиэдре X. (Каждый подполиэдр N_i может быть получен как симплициальная окрестность подполиэдра $Z_i \cap X$ в достаточно мелком подразделении комплекса, триангулирующего полиэдр X.)

Каждое вложение $N_i \hookrightarrow N_i \cup Z_i$ является композицией конечного числа элементарных выдавливаний. По теореме 27.4 (вернее, по ее части, начинающейся со слов «более того»), учитывая, что каждое вложение $N_i \cap Z_i \hookrightarrow Z_i$ является композицией конечного числа элементарных выдавливаний, получаем, что вложение $N_i \times Q \hookrightarrow (N_i \cup Z_i) \times Q$ гомотопно $\mathrm{rel}\,\mathrm{Bd}(N_i) \times Q$ гомеоморфизму $h_i\colon N_i \times Q \to (N_i \cup Z_i) \times Q$. Тогда отображения h_i, доопределенные тождественным отображением, дадут нам гомеоморфизм $h\colon X \times Q \to Y \times Q$, гомотопный вложению, причем эта гомотопия нетривиальна лишь на попарно непересекающихся компактах $(N_i \cup Z_i) \times Q_i$ и потому является собственной. ■

Замечания

§ 28. Теорема 28.1 впервые была доказана Вестом в [50] для полиэдров и в [51] для CW-комплексов.

§ 29. Теорема 29.4 также была доказана Вестом в [50] для полиэдров и в [51] для CW-комплексов.

§ 30. В [50] Вест получил вариант теоремы 30.3, основанный на понятии бесконечной простой гомотопии в смысле Уайхеда [53]. Этот подход отличается от подхода Зибенмана [42] к понятию бесконечной простой гомотопии.

IX. ТЕОРЕМА О РАСЩЕПЛЕНИИ

Пусть X и Y — полиэдры, причем X компактен и связен, и пусть $M \subset Y \times Q$ — открытое множество, для которого существует гомеоморфизм $h: X \times Q \times R \to M$, где R — числовая прямая. (Мы будем использовать это обозначение всюду в этой главе.) Заметим, что согласно 28.1 M есть Q-многообразие. *Расщепление* M — это разбиение, $M = M_1 \cup M_2$, где

(1) M_1, M_2 — некомпактные Q-многообразия, замкнутые в M,
(2) $M_0 = M_1 \cap M_2 = A \times Q_{n+1}$ для некоторого $n \geqslant 0$,
(3) $A \subset Y \times I^n$ — компактный подполиэдр,
(4) A обладает двойным *PL-воротником* в $Y \times I^n$, т.е. существует такое открытое PL-вложение

$$\varphi: A \times (-1, 1) \to Y \times I^n, \quad \text{что} \quad \varphi(A \times [0, 1)) \times Q_{n+1} \subset M_1,$$

$$\varphi(A \times (-1, 0]) \times Q_{n+1}) \subset M_2 \quad \text{и} \quad \varphi(a, 0) = a \quad \text{для всех} \quad a \in A.$$

В этой главе мы будем иметь дело со следующим вопросом: *когда существует такое расщепление*, $M = M_1 \cup M_2$, *что включение* $M_0 \hookrightarrow M$ *является гомотопической эквивалентностью?* Наш основной результат — теорема о расщеплении — дается в § 33. Она утверждает, что на этот вопрос имеется положительный ответ, если фундаментальная группа $\pi_1 X$ является свободной или свободной абелевой группой. Эта теорема играет важную роль в гл. X. Удивительно, что триангуляционная теорема гл. XI, которая опирается на теорему о расщеплении, может быть использована для доказательства теоремы о расщеплении без упомянутого выше ограничения на фундаментальную группу. Однако здесь не представляется возможным избежать этого ограничения.

Мы постепенно доказываем теорему о расщеплении в § 31 — 33. Приведем основные результаты этих параграфов.

§ 31. Здесь показывается, что расщепление Q-многообразия M существует. Описывается также общая процедура построения гомотопически модифицированных расщеплений.

§ 32. В этом параграфе показывается, что существует расщепление $M = M_1 \cup M_2$, для которого M_1 связно и включения $M_0 \hookrightarrow M_1$ и $M_0 \hookrightarrow M_2$ индуцируют изоморфизмы фундаментальной группы π_1.

§ 33. Доказывается теорема о расщеплении. Именно здесь используется ограничение на фундаментальную группу X.

§ 31. Конструкция расщеплений. В 31.1 мы доказываем, что расщепление Q-многообразия M существует. В 31.2 мы показываем, как расщепления могут быть модифицированы. Эта процедура модификации расщеплений является основным техническим приемом данной главы.

31.1. Теорема. *Расщепления Q-многообразия M существуют.*

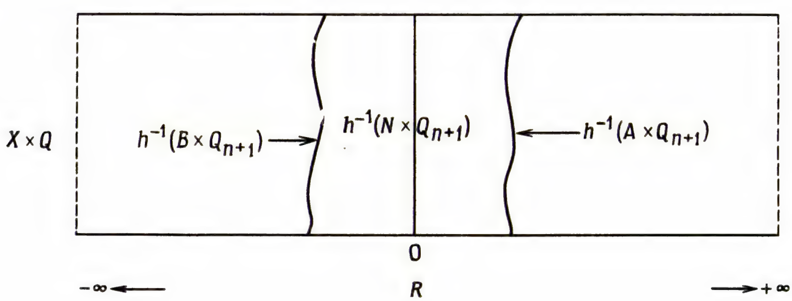
Доказательство. Рассмотрим компактное подмножество $h(X \times Q \times \{0\})$ открытого множества M пространства $Y \times Q$. Так же как при доказательстве теоремы 13.2, мы можем найти целое число $n \geqslant 0$ и компакт $C \subset Y \times I^n$, такие, что

$$h(X \times Q \times \{0\}) \subset C \times Q_{n+1} \subset M.$$

Поскольку C — компакт, мы можем найти такое открытое множество $U \subset Y \times I^n$, что $C \subset U$ и $U \times Q_{n+1} \subset M$. Нам потребуется такой компактный подполиэдр $N \subset Y \times I^n$, что $C \subset N \subset U$, и существует двойной PL-воротник

$$\varphi : \mathrm{Bd}(N) \times (-1, 1) \to U,$$

для которого справедливы $\varphi(\mathrm{Bd}(N) \times (-1, 0]) \to U$ и $\varphi(\mathrm{Bd}(N) \times [0,1)) \subset U \setminus [\mathrm{Int}\,(N)$. (Чтобы построить N, мы берем сначала компактный подполиэдр $N_1 \subset U$, который содержит C. Тогда в качестве N можно взять трубчатую окрестность этого подполиэдра в U. Более подробно см. [31, глава II].) Заметим, что $h^{-1}(N \times Q_{n+1})$ есть окрестность множества $X \times Q \times \{0\}$ в $X \times Q \times R$. См. рисунок.



Мы можем представить $\mathrm{Bd}(N)$ в виде суммы $\mathrm{Bd}(N) = A \cup B$, где $A \times Q_{n-1} \subset h(X \times Q \times (0, \infty))$ и $B \times Q_{n-1} \subset h(X \times Q \times (-\infty, 0))$. Множества A и B суть подполиэдры полиэдра N, а ограничение двойного воротника φ дает двойной воротник множества A в U. Положив

$$M_1 = h(X \times Q \times (0, \infty)) \setminus (\mathrm{Int}(N) \times Q_{n+1}),$$
$$M_2 = h(X \times (-\infty, 0)) \cup (N \times Q_{n+1}),$$

мы видим, что $M = M_1 \cup M_2$ и $M_1 \cap M_2 = A \times Q_{n+1}$, т.е. требуемое расщепление построено. ■

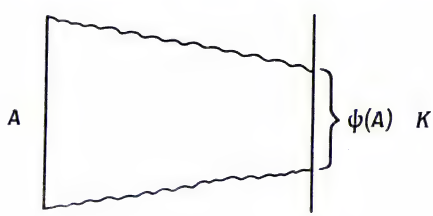
31.2. ТЕОРЕМА. *Пусть* $M = M_1 \cup M_2$ *— расщепление,* K *— компактный полиэдр и* $f\colon K \to M_1$ *— гомотопическое доминирование. (Это в точности означает существование такого отображения* $g\colon M_1 \to K$, *что* $fg\colon M_1 \to M_1$ *гомотопно* id_{M_1}.) *Тогда существует такое расщепление* $M = N_1 \cup N_2$, *что*

(1) $N_1 \subset \mathrm{Int}\,(M_1)$,

(2) $N_0 \hookrightarrow N_2 \setminus \mathrm{Int}\,(M_2)$ *— гомотопическая эквивалентность (здесь* $N_0 = N_1 \cap N_2$),

(3) *существует такая гомотопическая эквивалентность* $\alpha\colon K \to N_0$, что α *гомотопно* f *в* M_1.

Доказательство. По определению расщепления мы имеем $M_1 \cap M_2 = A \times Q_{n+1}$, где A — компактный подполиэдр $Y \times I^n$. Наш первый шаг — доказать, что A можно считать компактным подполиэдром K, для которого $f(a) = (a, (0, 0, \ldots)) \in A \times Q_{n+1}$ при всех $a \in A$. Чтобы доказать это, рассмотрим отображение $\theta\colon A \to K$, определяемое равенством $\theta(a) = g(a, (0, 0, \ldots))$, и возьмем произвольное PL-отображение $\psi\colon A \to K$, гомотопное θ. Пусть $M(\psi)$ — цилиндр отображения ψ, т.е. пространство, полученное из дискретной суммы $(A \times [0,1]) \amalg K$ отождествлением $(a, 1)$ с $\psi(a)$. Теперь мы отождествляем $a \in A$ с $(a, 0)$, а полиэдр K естественно отождествляется с подмножеством пространства $M(\psi)$. Из [21] следует, что $M(\psi)$ есть компактный полиэдр, а A и K — его подполиэдры. Приводим рисунок цилиндра $M(\psi)$. (Построение цилиндра симплициального отображения, правда с ошибками, можно найти также в [46].)



Пусть $c : M(\psi) \to K$ — ретракция, которая посылает (a, t) в $\psi(a)$, Отображение c — это гомотопическая эквивалентность, которая иногда называется *сжатием на базу.* Легко видеть, что ограничение $fc|_A$ отображения $fc : M(\psi) \to M_1$ гомотопно отображению A в M_1, которое посылает a в $(a, (0, 0, \ldots))$. Используя теорему о продолжении гомотопии для ANR-пространств (см. [9, стр. 57]), мы видим, что fc гомотопно новому отображению f', которое посылает a в $(a, (0, 0, \ldots))$ для всех a. Итак, заменяя K на $M(\psi)$ и f на f', мы видим, что A можно считать подполиэдром полиэдра K, для которого $f(a) = (a, (0, 0, \ldots))$.

С этим упрощающим предположением мы готовы начать доказательство теоремы. Поскольку $f(K) \cup (A \times Q_{n+1})$ — компактное подмножество открытого множества $M \subset Y \times Q$, можно выбрать целое число $n_1 \geqslant n$ и открытое подмножество $U \subset Y \times I^{n_1}$, так что $f(K) \cup (A \times Q_{n+1}) \subset U \times Q_{n_1+1} \subset M$. Мы можем представить U в виде суммы $U = U_1 \cup U_2$, где U_i — подполиэдры полиэдра $Y \times I^{n_1}$ и $U_i \times Q_{n_1+1} \subset M_i$. Заметим, что $U_1 \cap U_2 = A \times I_{n+1} \times \ldots \times I_{n_1}$. Так как A обладает двойным PL-воротником в $Y \times I^n$, то $A \times I_{n+1} \times \ldots \times I_{n_1}$ обладает PL-воротником и в U_1, и в U_2. Кроме того, $f(K) \subset U_1 \times Q_{n_1+1}$.

Нам будет удобно до конца доказательства отождествить Y с $Y \times \{0\} \subset Y \times Q$ и $Y \times I^a$ с $Y \times I^a \times \{0\} \subset Y \times Q$, где $0 = (0, 0, \ldots) \in Q_{a+1}$. Пусть отображение $f_1: K \to U_1 \times Q_{n_1+1}$ определяется равенством $f_1(k) = x$, где $f(k) = (x, q) \in U_1 \times Q_{n_1+1}$. Тогда $f_1(K) \subset U_1$, $f_1|_A = f|_A$ и f_1 гомотопно f в M_1. Мы можем предполагать, что f_1 есть PL-отображение.

Пусть $\theta: K \to [-1, 1,]^m = I_{n_1+1} \times \ldots I_{n_1+m}$ — такое PL-отображение, что $\theta(A) = \{0\}$, $\theta(K \setminus A) \subset [-1, 1]^m \setminus \{0\}$ и $\theta|_{K \setminus A}$ взаимно однозначно. Определим $f_2: K \to U_1 \times [-1, 1]^m \subset Y \times I^{n_1+m}$, полагая $f_2(k) = (f_1(k), \theta(k))$. Тогда f_2 есть такое PL-вложение K в $U_1 \times [-1, 1]^m$, что $f_2|_A = f|_A$ и f_2 гомотопно f в M_1 (сравните это с конструкцией, данной в 8.1). Поскольку $A \times I_{n+1} \times \ldots I_{n_1+m}$ обладает PL-воротником в $U_1 \times [-1, 1]^m$, мы можем стащить $f_2(K \setminus A)$ с множества $A \times I_{n+1} \times \ldots I_{n_1+m}$, т.е. можно предполагать, что

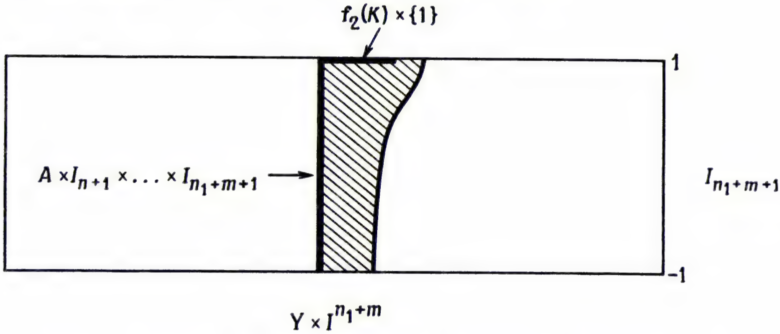
$$f_2(K) \cap (A \times I_{n+1} \times \ldots \times I_{n_1+m}) = A.$$

Рассмотрим компактный подполиэдр K полиэдра $Y \times I^{n_1+m+1}$, определяемый равенством

$$K = (A \times I_{n+1} \times \ldots \times I_{n_1+m+1}) \cup (f_2(K) \times \{1\}),$$

где $1 \in I_{n_1+m+1}$. Ясно, что включение $f_2(K) \times \{1\} \hookrightarrow \widetilde{K}$ является гомотопической эквивалентностью. Если D — трубчатая ок-

рестность множества $\tilde{K}$ в $U_1 \times I_{n_1+1} \times \ldots \times I_{n_1+m+1}$, то $D \times Q_{n_1+m+2} \subset M_1$. См. следующий рисунок.



На этом рисунке $\tilde{K}$ изображено жирной линией, а D — заштрихованной областью.

Наше новое расщепление $M = N_1 \cup N_2$ определяется следующим образом:

$$N_2 = M_2 \cup (D \times Q_{n_1+m+2}),$$
$$N_1 = M \setminus \operatorname{Int} N_2.$$

Мы должны показать, что условия (2) и (3) из утверждения теоремы выполнены. Для того чтобы показать, что $N_0 \hookrightarrow N_2 \setminus \operatorname{Int} M_2$ — гомотопическая эквивалентность, надо доказать, что $\operatorname{Bd} D \hookrightarrow D$ — гомотопическая эквивалентность, где граница $\operatorname{Bd} D$ берется в $U_1 \times I_{n_1+1} \times \ldots \times I_{n_1+m+1}$. Согласно определению $\tilde{K}$, мы можем легко показать, что включение $D \setminus \tilde{K} \hookrightarrow D$ является гомотопической эквивалентностью. Это верно, поскольку $\tilde{K}$ есть Z-множество в D. Поскольку D — трубчатая окрестность полиэдра $\tilde{K}$, т.е. $D \setminus \tilde{K} \approx \operatorname{Bd} D \times [0, 1]$, то вложение $\operatorname{Bd} D \hookrightarrow D \setminus \tilde{K}$ является гомотопической эквивалентностью. Значит, $\operatorname{Bd} D \hookrightarrow D$ есть гомотопическая эквивалентность.

Чтобы построить требуемую гомотопическую эквивалентность $\alpha: K \to N_0$, мы определим α как композицию

$$K \xrightarrow{f_2} f_2(K) \xrightarrow{\times 1} f_2(K) \times \{1\} \hookrightarrow \tilde{K} \hookrightarrow D \xrightarrow{u} \operatorname{Bd} D \hookrightarrow N_0,$$

где u гомотопически обратно гомотопической эквивалентности $\operatorname{Bd} D \hookrightarrow D$. Каждое отображение в этой композиции есть гомотопическая эквивалентность и композиция гомотопна f в M_1. ■

§ 32. ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ ГРУППА РАСЩЕПЛЕНИЯ. В 32.3 мы доказываем существование такого расщепления $M = M_1 \cup M_2$,

что M_i связны и включения $M_0 \hookrightarrow M_1$, $M_0 \hookrightarrow M_2$ индуцируют изоморфизмы фундаментальной группы π_1. В 32.1 и 32.2 мы устанавливаем две леммы, которые нужны при доказательстве теоремы 32.3. Первая полностью геометрическая, в то время как вторая полностью алгебраическая и ее доказательство только намечено.

§ 32.1. Лемма. *Если $M = M_1 \cup M_2$ — расщепление, то существует компактный полиэдр K и гомотопическое доминирование $f: K \to M_1$.*

Доказательство. Имеем $M_0 = A \times Q_{n+1}$, где $A \subset Y \times I^n$ — компактный полиэдр. Так как X связно и M_i не компактны, $i = 1, 2$, то для некоторого большого числа $r > 0$ имеют место включения

$$h(X \times Q \times [r, \infty)) \subset M_1,$$
$$h(X \times Q \times (-\infty, -r]) \subset M_2$$

(при надлежащем выборе обозначений).

Пусть $U \subset Y \times I^{n_1} (n_1 \geqslant n)$ — такое открытое множество, что

$$h(X \times Q \times [-r, r]) \subset U \times Q_{n_1+1} \subset M,$$

и пусть $\tilde{K} \subset U$ — такой компактный подполиэдр, что $h(X \times Q \times [-r, r]) \subset \tilde{K} \times Q_{n_1+1}$. Запишем $\tilde{K} = K \cup L$, где K и L — такие компактные подполиэдры, что $K \times Q_{n_1+1} \subset M_1$ и $L \times Q_{n_1+1} \subset M_2$. Мы утверждаем, что включение $K \times Q_{n_1+1} \hookrightarrow M_1$ есть гомотопическая эквивалентность. Чтобы проверить это, определим отображение $g: M_1 \to K \times Q_{n_1+1}$ следующим образом:

$$gh(x, q, t) = \begin{cases} h(x, q, t) & \text{для} \quad (x, q, t) \in M_1 \quad \text{и} \quad t \leqslant r, \\ h(x, q, r) & \text{для} \quad t \geqslant r. \end{cases}$$

Отображение g гомотопно id_{M_1} и, значит, является гомотопически правым обратным включения $K \times Q_{n_1+1} \hookrightarrow M_1$. Это означает, что $K_1 \times Q_{n_1+1} \hookrightarrow M_1$ — гомотопическое доминирование, откуда непосредственно вытекает существование гомотопического доминирования $f: K \to M_1$, определяемого композицией

$$K \xrightarrow{\times 0} K \times Q_{n_1+1} \hookrightarrow M_1. \quad \blacksquare$$

32.2. Лемма. *Пусть K — компактный полиэдр, S — ANR-пространство и $f: K \to S$ — гомотопическое доминирование. Тогда существует компактный полиэдр L и гомотопическое домини-*

рование $g : L \to S$, *которое индуцирует биекцию между компонентами связности* L *и* S *и изоморфизмы между фундаментальными группами этих компонент.*

Эскиз доказательства. Мы не даем всех деталей доказательства, так как лемма следует из [20], [41] или [49]. Поскольку K — компакт и f — гомотопическое доминирование, f индуцирует эпиморфизм конечного множества компонент связности полиэдра K на множество компонент связности пространства S. Добавляя к полиэдру K конечное число 1-клеток, мы можем расширить K до компактного полиэдра K_1 и продолжить f до гомотопического доминирования $f_1 : K_1 \to S$ так, что f_1 индуцирует биекцию между компонентами связности пространств K_1 и S.

Следующий шаг — операция на π_1. Предположим, что K_1 имеет одну компоненту связности, и заметим, что f_1 индуцирует эпиморфизм фундаментальной группы π. Добавляя к K_1 конечное число 2-клеток (чтобы убить ядро этого эпиморфизма), мы можем увеличить K_1 до компактного полиэдра L и продолжить f_1 до гомотопического доминирования $g : L \to S$, которое индуцирует изоморфизм группы π_1. Если K_1 имеет больше чем одну компоненту связности, мы применяем эту процедуру к каждой компоненте. Читатель должен быть предупрежден, что ядро эпиморфизма, индуцированного отображением f_1, не обязательно конечно порождено, но это ядро является нормальным замыканием некоторого конечного множества. Подробности см. в [41, стр. 18]. ■

32.3. Теорема. *Существует такое расщепление* $M = M_1 \cup M_2$, *что* M_0, M_1 *и* M_2 *связны и включения* $M_0 \hookrightarrow M_1$ *и* $M_0 \hookrightarrow M_2$ *индуцируют изоморфизмы фундаментальной группы* π_1.

Доказательство. Пусть $M = M_1' \cup M_2'$ — какое-нибудь расщепление. Используя 32.1 и 32.2, мы можем найти гомотопическое доминирование $f : K \to M_1'$, которое индуцирует биекцию между компонентами связности и изоморфизмы групп π_1 этих компонент. Согласно 31.2, существует такое расщепление $M = N_1 \cup N_2$, что

(1) $N_1 \subset \operatorname{Int} M_1'$,

(2) $N_0 \hookrightarrow N_2 \setminus \operatorname{Int} M_2'$ — гомотопическая эквивалентность,

(3) существует такая гомотопическая эквивалентность $\alpha : K \to N_0$, что $\alpha \simeq f$ (в M_1'). Согласно (2), существует гомотопическая эквивалентность $\theta : M_1' \to N_1$, которая гомотопна тождественному отображению M_1'. Здесь используется тот факт, что существует сильная деформационная ретракция множества $N_2 \setminus \operatorname{Int}(M_2')$ на N_0 (подробности см. в [46, стр. 31]). Если

$\beta : N_0 \to K$ гомотопически обратно отображению α, то композиция

$$N_0 \xrightarrow{\beta} K \xrightarrow{f} M_1' \xrightarrow{\theta} N_1$$

гомотопна включению $N_0 \hookrightarrow N_1$ (в M_1', так как имеется ретракция M_1' на N_1) и индуцирует биекцию между компонентами связности и изоморфизмы фундаментальных групп этих компонент. То, что мы сейчас сделали, можно назвать «сдвигом» расщепления $M = M_1' \cup M_2'$ вправо. Теперь повторим эту процедуру, сдвигая расщепление $M = N_1 \cup N_2$ влево.

Повторяя только что проведенные рассуждения, получаем гомотопическое доминирование $g : L \to N_2$, которое индуцирует биекцию между компонентами связности и изоморфизмы фундаментальных групп этих компонент, а также такое расщепление $M = M_1 \cup M_2$, что

(1) $N_1 \subset \operatorname{Int} M_1$,

(2) $M_0 \hookrightarrow M_1 \setminus \operatorname{Int}(N_1)$ есть гомотопическая эквивалентность,

(3) существует такая гомотопическая эквивалентность $\alpha_1 : L \to M_0$, что $\alpha_1 \simeq g$ (в N_2). По аналогии с включением $N_0 \hookrightarrow N_1$ включение $M_0 \hookrightarrow M_2$ индуцирует биекцию между компонентами связности и изоморфизмы фундаментальных групп этих компонент. Включение $M_0 \hookrightarrow M_1$ разлагается в композицию

$$M_0 \hookrightarrow M_1 \setminus \operatorname{Int}(N_1) \hookrightarrow M.$$

Согласно (2), первое включение есть гомотопическая эквивалентность. Поскольку $N_0 \hookrightarrow N_1$ индуцирует биекцию между компонентами связности и изоморфизмы фундаментальных групп этих компонент, мы видим, что второе включение в этой композиции также индуцирует биекцию между компонентами связности и изоморфизмы фундаментальных групп этих компонент.

Итак, мы показали, что включения $M_0 \hookrightarrow M_1$ и $M_0 \hookrightarrow M_2$ индуцируют биекции между компонентами связности и изоморфизмы фундаментальных групп этих компонент. Это влечет связность M_0, M_1 и M_2. ■

§ 33. Основной результат. В 33.2 мы доказываем наш основной результат — теорему о расщеплении. Следующее утверждение — алгебраический инструмент, который нужен в доказательстве. За подробностями мы отсылаем читателя к [49]. См. также в [46, стр. 420] значительно более простой случай простой связности.

33.1. Лемма. *Пусть $f : K \to S$ — гомотопическое доминирование, где K — компактный полиэдр и S — ANR — пространс-*

тво. Тогда если S связно, а группа $\pi_1(S)$ свободна или свободная абелева, то S гомотопически эквивалентно компактному полиэдру.

33.2. Теорема. *Если $\pi_1(X)$ — свободная или свободная абелева группа, то существует такое расщепление $M = M_1 \cup M_2$, что $M_0 \hookrightarrow M$ есть гомотопическая эквивалентность.*

Доказательство. Согласно 32.3, существует такое расщепление $M = M'_1 \cup M'_2$, что M'_0, M'_1, M'_2 связны и включения $M'_0 \hookrightarrow M'_1$ и $M'_0 \hookrightarrow M'_2$ индуцируют изоморфизмы фундаментальной группы. Следовательно, $M'_i \hookrightarrow M$ индуцирует изоморфизм фундаментальных групп для $i = 0, 1, 2$ (вследствие теоремы Ван Кампена). Так как группа $\pi_1(X)$ свободная или свободная абелева, то $\pi_1(M'_1)$ и $\pi_1(M'_2)$ также свободные или свободные абелевы.

Согласно 32.1, существует компактный полиэдр, который гомотопически доминирует над множеством M'_1. В силу 33.1, мы заключаем, что существует компактный полиэдр K и гомотопическая эквивалентность $f\colon K \to M'_1$. Теперь мы применяем трюк «сдвига» вправо и влево, который был проделан в 32.3. Используя 31.2, мы можем найти такое новое расщепление $M = N_1 \cup N_2$, что

(1) $N_1 \subset \operatorname{Int} M'_1$,

(2) $N_0 \hookrightarrow N_2 \setminus \operatorname{Int} M'_2$ есть гомотопическая эквивалентность,

(3) существует такая гомотопическая эквивалентность $\alpha\colon K \to N_0$, что $\alpha \simeq f$ (в M'_1).

Легко показать, что $N_0 \hookrightarrow N_1$ есть гомотопическая эквивалентность (сравнить с доказательством теоремы 32.3). Отсюда вытекает, что $N_2 \hookrightarrow M$ есть гомотопическая эквивалентность и, значит, N_2 гомотопически эквивалентно X. Итак, N_2 гомотопически эквивалентно компактному полиэдру.

Снова используя описанную выше процедуру, находим такое новое расщепление $M = M_1 \cup M_2$, что

(1) $M_2 \subset \operatorname{Int} N_2$,

(2) $M_0 \hookrightarrow N_2 \setminus \operatorname{Int} M_2$ есть гомотопическая эквивалентность,

(3) $M_0 \hookrightarrow M_2$ есть гомотопическая эквивалентность (так же как мы заметили выше, что $N_0 \hookrightarrow N_1$ есть гомотопическая эквивалентность).

Из (2) и того, что $N_0 \hookrightarrow N_1$ — гомотопическая эквивалентность, получаем, что $M_0 \hookrightarrow M_1$ есть гомотопическая эквивалентность. Значит, $M_0 \hookrightarrow M$ — гомотопическая эквивалентность. ■

Замечания

§ 31. Процедура модификации расщеплений, данная в 31.2, появилась неявно в работе Чепмэна [14].

§ 32. Процедура модификации π_1, данная в 32.3, также появилась неявно в работе Чепмэна [14]. Идея восходит к работе Зибенмана [41].

§ 33. Теорема о расщеплении 33.2 в явном виде также появилась в работе Чепмэна [14]. Смотри также аналогичное утверждение у Зибенмана [41]. Интересно отметить следующее обобщение теоремы 33.2, которое может быть доказано применением аналогичной техники: *Пусть X и P — полиэдры, причем X компактен и связен, и пусть f: $X \times Q \times R \to P \times Q$ — собственная гомотопическая эквивалентность. Тогда имеется препятствие в $\tilde{K}_0\pi_1(X)$, чье исчезновение влечет существование такого расщепления*

$$P \times Q = M_1 \cup M_2,$$

что $M_0 \hookrightarrow P \times Q$ есть гомотопическая эквивалентность.

Здесь $\tilde{K}_0$ — приведенный K-функтор. В теореме 33.2, где $\pi_1(X)$ — свободная или свободная абелева группа, группа препятствия $\tilde{K}_0\pi_1(X)$ исчезает.

X. ТЕОРЕМА О ВЫПРЯМЛЕНИИ РУЧЕК

Через R^n обозначим n-мерное евклидово пространство и для $r>0$ пусть $B_r^n=[-r, r]^n\subset R^n$. Компактный подполиэдр Y полиэдра X называется *прямым*, если $\mathrm{Bd}\,Y$ обладает PL-воротником и в Y, и в $X\setminus\mathrm{Int}\,Y$. Это означает, что существует такой двойной PL-воротник $\varphi\colon \mathrm{Bd}\,Y\times(-1, 1)\to X$, что $\varphi(\mathrm{Bd}\,Y\times(-1, 0])\subset Y$ и $\varphi(\mathrm{Bd}\,Y\times[0, 1))\subset X\setminus\mathrm{Int}\,Y$.

Наш основной результат (35.1) — теорема о выпрямлении ручек. Она утверждает, что если $h\colon R^n\times Q\to X\times Q$ — открытое вложение и X — произвольный полиэдр, то существуют гомеоморфизм $g\colon X\times Q\to X\times Q$ и целое число $k\geqslant 0$, такие, что $gh(B_1^n\times Q)=Y\times Q_{k+1}$, где $Y\subset X\times I^k$ — прямой полиэдр. Доказательство естественно разделяется на два шага. Сначала строится прямой полиэдр $Y\subset X\times I^k$. При этом используется теорема о расщеплении из гл. IX. Затем строится гомеоморфизм g. Здесь используется искусственный прием с тором из [34]. Теорема о выпрямлении ручек имеет решающее значение в гл. XI и XII.

§ 34. Погружения. Отображение $\alpha\colon X\to Y$ называется *погружением*, если α локально является открытым вложением. Это означает, что у каждой точки $x\in X$ существует открытая окрестность $U\subset X$, для которой $\alpha|_U\colon U\to Y$ является открытым вложением. Погружения играют ключевую роль в доказательстве теоремы о выпрямлении ручек.

В 34.1 мы получаем бесконечномерный результат о погружении, а в 34.3 мы описываем некоторые частные результаты, касающиеся конечномерных погружений.

34.1. Теорема. *Пусть M — Q-многообразие, X — полиэдр и $\alpha\colon M\to X\times Q$ — погружение. Тогда всякий компакт в M лежит в триангулируемом открытом множестве.*

Доказательство. Напомним из § 23, что открытое подмножество Q-многообразия M называется триангулируемым, если

оно гомеоморфно произведению некоторого полиэдра на Q. Пусть $C \subset M$ — произвольный компакт. Мы должны найти такое открытое множество $U \subset M$, содержащее компакт C, что $U \cong Y \times Q$ для некоторого полиэдра Y. Сначала выберем такое открытое покрытие $\{U_i\}_{i=1}^n$ компакта C, что

(1) из $U_{i_1} \cap U_{i_2} \neq \varnothing$ следует взаимная однозначность отображения $\alpha | U_{i_1} \cup U_{i_2}$,

(2) $\alpha(U_i) = V_i \times Q_{k+1}$, где $V_i \subset X \times I^k$ открыто.

Положим

$$Y = \bigcup_{i=1}^{n} (\alpha|_{U_i})^{-1}(V_i \times \{0\}],$$

где $0 = (0, 0, \ldots) \in Q_{k+1}$. Ограничение отображения α на Y дает погружение Y и $X \times I^k$, а из теории кусочно-линейных многообразий следует, что это погружение определяет PL-структуру на Y, превращая Y в полиэдр (см. [31, глава III]). Мы построим триангулируемую окрестность компакта C, доказав, что $\bigcup\limits_{i=1}^{n} U_i$ гомеоморфно $Y \times Q_{k+1}$.

Выберем произвольную точку $m \in U_i$ и положим

$$h(m) = ((\alpha|_{U_i})^{-1}(x, 0), q) \in Y \times Q_{k+1},$$

где

$$\alpha(m) = (x, q) \in (X \times I^k) \times Q_{k+1} \quad \text{и} \quad 0 \in Q_{k+1}.$$

Мы оставляем в качестве упражнения для читателей доказательство того, что отображение h определено корректно и является гомеоморфизмом из $\bigcup\limits_{i=1}^{n} U_i$ на $Y \times Q_{k+1}$. ■

Небольшая модификация только что приведенного доказательства дает нам несколько более сильный результат.

34.2. Следствие. *Пусть M, X и α те же, что и выше, и пусть $U \subset M$ — такое открытое множество, что $\alpha|_U$ взаимно однозначно и существует прямой полиэдр $X_1 \subset X$, для которого $X_1 \times Q \subset \alpha(U)$. Тогда каждый компакт в*

$$M_1 = M \setminus (\alpha|_U)^{-1}(\operatorname{Int} X_1 \times Q)$$

лежит в относительно триангулируемом открытом подмножестве пространства M_1. ■

Нам потребуются некоторые дополнительные обозначения. Через S^1 обозначается стандартная окружность, а через $e: R \to S^1$ — накрытие, определяемое равенством

$$e(x) = \exp(\pi i x/4).$$

Таким образом, $e([-4, 4]) = S^1$, а отображение $e|_{(-4, 4)}$ взаимно однозначно. Через $T^n = S^1 \times S^1 \times \ldots \times S^1$ обозначен n-мерный тор, а через $e^n\colon R^n \to T^n$ — произведение накрытий ($e^n = e \times e \times \ldots \times e$). Пусть $T_0^n = T^n \setminus \{p_0\}$ — пунктированный тор, где $p_0 \notin e^n(B_2^n)$.

34.3. Теорема. *Существует такое погружение $\alpha\colon T_0^n \to R^n$, что $\alpha e^n|_{B_2^n}\colon B_2^n \to B_2^n$ — тождественное отображение.*

Замечания о доказательстве. В [26] дано элементарное доказательство существования погружения $\alpha\colon T_0^n \to R^n$. Другое элементарное доказательство можно найти также в [39, стр. 290]. Как только α построено, мы можем модифицировать его так, чтобы $\alpha e^n|_{B_2^n}$ стало тождественным отображением. Эта модификация использует теорему Шёнфлиса (см. [33, стр. 48]). ■

§ 35. Основной результат. Теперь мы готовы доказывать теорему о выпрямлении ручек. В ее доказательстве мы используем результаты из нескольких предыдущих глав.

35.1 Теорема. *Пусть X — полиэдр и $h\colon R^n \times Q \to X \times Q$ — открытое вложение ($n \geqslant 1$). Тогда существует такой гомеоморфизм $g\colon X \times Q \to X \times Q$, сосредоточенный на $h(B_2^n \times Q)$ (т.е. $g = \mathrm{id}$ на дополнении к множеству $h(B_2^n \times Q)$), что $gh(B_1^n \times Q) = Y \times Q_{k+1}$, где $Y \subset X \times I^k$ — прямой полиэдр.*

Доказательство. Мы начнем с построения полиэдра Y. Предположим сначала, что $n \geqslant 2$, и возьмем ограничение отображения h на $(\mathrm{Int}\, B_2^n \setminus B_1^n) \times Q$, которое можно рассматривать как открытое вложение множества $\mathrm{Bd}(B_{3/2}^n) \times Q \times R$ в $X \times Q$. Заметим, что $\mathrm{Bd}(B_{3/2}^n)$ связано и $\pi_1(\mathrm{Bd} B_{3/2}^n) = Z$ или 0. По теореме 33.2 существует такое расщепление

$$h((\mathrm{Int}\, B_2^n \setminus B_1^n) \times Q) = M_1 \cup M_2,$$

что $M_1 \cap M_2 \hookrightarrow M_1 \cup M_2$ — гомотопическая эквивалентность и $M_1 \cap M_2 = A \times Q_{k+1}$, где $A \subset X \times I^k$ — компактный подполиэдр, имеющий двойной PL-воротник. Мы можем считать, что M_1 содержит $h((B_r^n \setminus B_1^n) \times Q)$ для r, близких к 1. Тогда $h(B_1^n \times Q) \cup M_1$ — компакт, топологической границей которого является множество $A \times Q_{k+1}$. Если обозначить через Y проекцию $h(B_1^n \times Q) \cup M_1$ в $X \times I^k$, то Y будет таким прямым подполиэдром, что $\mathrm{Bd}\, Y = A$ и $h(B_1^n \times Q) \cup M_1 = Y \times Q_{k+1}$. Итак,

$$h(B_1^n \times Q) \cup Y \times Q_{k+1} \subset h(B_2^n \times Q).$$

Если $n=1$, то $\operatorname{Bd} B^n_{3/2}$ имеет две компоненты, и мы, повторяя только что проведенные рассуждения для каждой компоненты отдельно, строим Y так, что $\operatorname{Bd} Y$ имеет две стягиваемые компоненты.

Остаток доказательства посвящен построению гомеоморфизма g. Сначала разберем случай $n=1$, поскольку он чрезвычайно прост по сравнению со случаями $n \geqslant 2$. В этом случае $\operatorname{Bd} Y = A_1 \cup A_2$, где A_1 и A_2 дизъюнктны и стягиваемы. Выбрав надлежащим образом обозначения, мы можем записать

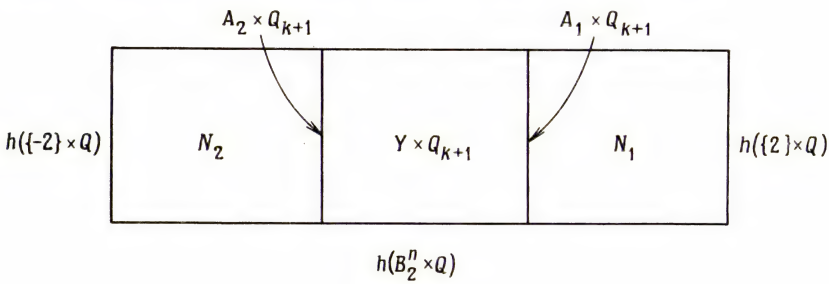
$$h(B^1_2 \times Q) \setminus \operatorname{Int}(Y) \times Q_{k+1} = N_1 \cup N_2,$$

где N_1 и N_2 — такие компактные стягиваемые Q-многообразия, что

$$\operatorname{Bd} N_1 = (A_1 \times Q_{k+1}) \cup h(\{2\} \times Q),$$

$$\operatorname{Bd} N_2 = (A_2 \times Q_{k+1}) \cup h(\{-2\} \times Q)$$

(проверять то, что N_1 есть Q-многообразие надо только в точках из $A_1 \times Q_{k+1}$, а для этого мы используем тот факт, что A_1 имеет двойной PL-воротник согласно 28.1). См. рисунок.



Применяя 22.1, мы имеем $N_1 \cong N_2 \cong Q$. Таким образом, существуют гомеоморфизмы $g_1\colon h([1, 2] \times Q) \to N_1$ и $g_2\colon h([-2, -1] \times Q) \to N_2$. Согласно 19.4 (продолжая гомеоморфизмы Z-множеств), мы можем потребовать, чтобы

$$g_1|_{h(\{2\} \times Q)} = \mathrm{id}, \quad g_1 h(\{1\} \times Q) = A_1 \times Q_{k+1},$$

$$g_2|_{h(\{-2\} \times Q)} = \mathrm{id}, \quad g_2 h(\{-1\} \times Q) = A_2 \times Q_{k+1}.$$

Поскольку Y стягиваемо, мы имеем гомеоморфизм $g_3\colon h([-1, 1] \times Q) \to Y \times Q_{k+1}$. Применяя 19.4, мы можем потребовать, чтобы $g_3 = g_1$ на $h(\{1\} \times Q)$ и $g_3 = g_2$ на $h(\{-1\} \times Q)$. Следовательно, соединяя g_1, g_2 и g_3 вместе и продолжая тождественным отображением, получаем желаемый выпрям-

ляющий гомеоморфизм g. Этим завершается исследование случая $n=1$.

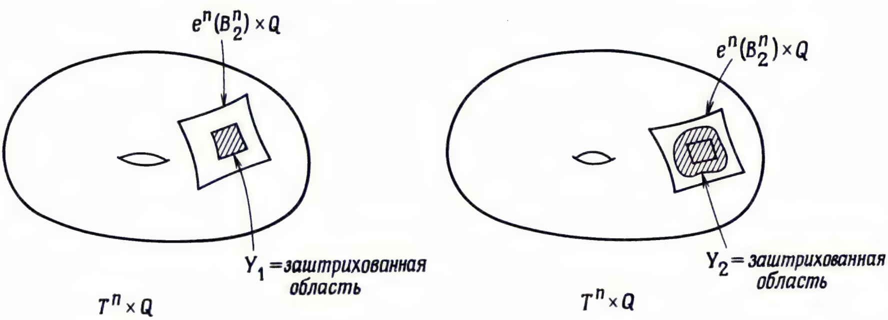
Теперь разберем случай $n \geqslant 2$. Будем последовательно рассматривать диаграммы пространств и отображений. Наша задача — построить гомеоморфизм $f_4\colon B_2^n \times Q \to B_2^n \times Q$, который тождествен на $\mathrm{Bd}\, B_2^n \times Q$ и для которого hf_4h^{-1} продолжается тождественным отображением до искомого гомеоморфизма g. Мы примем обозначение из 34.3. В частности, $e^n \times \mathrm{id}_Q = R^n \times Q \to T^n \times Q$ — накрытие, а $\alpha \times \mathrm{id}_Q\colon T_0^n \times Q \to R^n \times Q$ — погружение, где α — погружение из 34.3.

$$\begin{tikzcd}
B_2^n \times Q \arrow[r, "f_4"] & B_2^n \times Q \\
\mathrm{Int}(B_2^n) \times Q \arrow[u, hook] \arrow[r, "f_3"] \arrow[d, "\beta\times\mathrm{id}"'] & \mathrm{Int}(B_2^n) \times Q \arrow[u, hook] \arrow[d, "\beta\times\mathrm{id}"] \\
R^n \times Q \arrow[r, "\tilde f_2"] \arrow[d, "e^n\times\mathrm{id}"'] & R^n \times Q \arrow[d, "e^n\times\mathrm{id}"] \\
T^n \times Q \arrow[r, "f_2"] & T^n \times Q \\
Y_1 \arrow[u, hook] \arrow[r, "f_1"] & Y_2 \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

1. Построение f_1. Положим

$$Y_1 = e^n(B_2^n) \times Q, \quad Y_2 = [(\alpha \times \mathrm{id}_Q) | e^n(B_2^n \quad) \times Q]^{-1} h^{-1}(Y \times Q_{k+1}).$$

Это — подмножества пространства $T^n \times Q$. (См. рисунок.)



Мы хотим, чтобы отображение $f_1\colon Y_1 \to Y_2$ было таким гомеоморфизмом, переводящим $\mathrm{Bd}\, Y_1$ в $\mathrm{Bd}\, Y_2$, что $f_1|_{\mathrm{Bd}\, Y_1}$ гомотопно включению

$$\mathrm{Bd}\ Y_1 \hookrightarrow e^n(B_2^n \setminus \mathrm{Int}\, B_1^n) \times Q,$$

причем гомотопия происходит в $e^n(B_2^n \setminus \mathrm{Int}\ B_1^n) \times Q$.

Поскольку $\mathrm{Bd}\, Y \times Q_{k+1} \hookrightarrow h((B_2^n \setminus \mathrm{Int}\, B_1^n) \times Q)$ — гомотопическая эквивалентность, мы можем выбрать гомотопическую эквивалентность $f_1'\colon \mathrm{Bd}\, Y_1 \to \mathrm{Bd}\, Y_2$, для которой диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Bd}\,(Y_1) \arrow[r, "h(\alpha\times \mathrm{id})", "\text{гомео-морфизм}"'] \arrow[dd, "f_1'"'] & h(\mathrm{Bd}\,(B_1^n)\times Q) \arrow[dr, hook, "\text{гомотопическая эквивалентность}"] & \\
& & h((B_2^n - \mathrm{Int}\,(B_1^n))\times Q) \\
\mathrm{Bd}(Y_2) \arrow[r, "h(\alpha\times \mathrm{id})", "\text{гомео-морфизм}"'] & \mathrm{Bd}\,(Y)\times Q_{k+1} \arrow[ur, hook, "\text{гомотопическая эквивалентность}"'] &
\end{tikzcd}$$

гомотопна коммутативной. Далее f_1' должно быть гомотопно включению $\mathrm{Bd}\, Y_1 \hookrightarrow e^n(B_2^n \setminus \mathrm{Int}\, B_1^n) \times Q$. Кроме того, $\mathrm{Bd}\, Y_1$ и $\mathrm{Bd}\, Y_2$ — триангулируемые Q-многообразия, а $\pi_1(\mathrm{Bd}\, Y_1)$ равна Z или 0. Используя 29.5, видим, что f_1' гомотопно гомеоморфизму f_1''. Но $\mathrm{Bd}\, Y_1$ есть Z-множество в гильбертовом кубе Y_1, $i = 1, 2$. Значит, f_1'' можно продолжить до гомеоморфизма $f_1\colon Y_1 \to Y_2$, который удовлетворяет нашим требованиям.

2. Построение f_2. Мы хотим, чтобы $f_2\colon T^n \times Q \to T^n \times Q$ было гомеоморфизмом, продолжающим f_1 и гомотопным тождественному отображению. Определим Q-многообразие

$$M = T^n \times Q \setminus \mathrm{Int}\ Y_1,$$

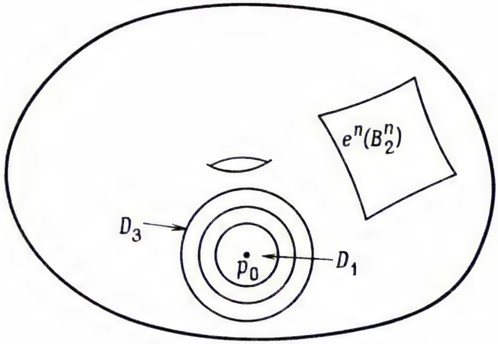
$$N = T^n \times Q \setminus \mathrm{Int}\ Y_2.$$

Сначала мы построим гомеоморфизмы $f_2'\colon M \to N$, который является продолжением $f_1|_{\mathrm{Bd}\, Y_1}$.

Выберем концентрические кусочно-линейные n-мерные шары

$$D_1 \subset \mathrm{Int}\ D_2 \subset D_2 \subset \mathrm{Int}\ D_3 \subset D_3 \subset T^n \setminus e^n(B_2^n),$$

так, чтобы $\mathrm{Int}\ D_1$ содержало отмеченную точку $\{p_0\} = T^n \setminus T_0^n$. (См. рисунок.)



T^n

Многообразие $M \setminus \operatorname{Int} D_2 \times Q$ триангулируемо, а, в силу 34.2, каждый компакт в $N \setminus \{p_0\} \times Q$ лежит в триангулируемом открытом множестве (в качестве погружения, необходимого для применения 34.2, берем $h(\alpha \times \mathrm{id})$). Следовательно, мы можем рассматривать $N \setminus D_1 \times Q$ как открытое подмножество $Z \times Q$ для некоторого полиэдра Z.

По теореме о расщеплении существует такое расщепление

$$(\operatorname{Int} D_3 \setminus D_1) \times Q = A_1 \cup A_2,$$

что $A_1 \cap A_2 \hookrightarrow A_1 \cup A_2$ есть гомотопическая эквивалентность и $A_1 \cap A_2 = B \times Q_{l+1}$ для некоторого компактного подполиэдра B, имеющего двойной PL-воротник в $Z \times I^l$. Полиэдр B ограничивает такой компактный полиэдр $C \subset Z \times I^l$, что

$$N \setminus \operatorname{Int} D_3 \times Q \subset C \times Q_{l+1}.$$

Более того, включение

$$(T^n \setminus e^n(\operatorname{Int} B_2^n) \cup \operatorname{Int} D_3) \times Q \hookrightarrow C \times Q_{l+1}$$

является гомотопической эквивалентностью. Следовательно, можно найти гомотопическую эквивалентность θ, которая превращает следующую диаграмму в гомотопически эквивалентную:

$$\begin{tikzcd}
M - (\operatorname{Int}(D_2) \times Q \arrow[rr, "\theta"] & & C \times Q_{l+1} \\
& {[T^n - (e^n(\operatorname{Int}(B_2^n)) \cup \operatorname{Int}(D_3))] \times Q} \arrow[ul, hook] \arrow[ur, hook] &
\end{tikzcd}$$

Заметим, что C гомотопически эквивалентно n-мерному тору с двумя выкинутыми точками. Значит, $\pi_1(C)$ изоморфна свободному произведению $\mathbb{Z}*\mathbb{Z}*\mathbb{Z}$ для $n=2$ и прямой сумме

$$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\ldots\oplus\mathbb{Z}\quad (n \text{ экземпляров})$$

для $n\geqslant 3$. В силу 29.5 θ гомотопно гомеоморфизму θ_1. Применяя еще раз 29.5 и затем 19.4, мы можем дополнительно получить

(1) $\theta_1|_{\mathrm{Bd}\,Y_1}=f_1|_{\mathrm{Bd}\,Y_1}$,

(2) $\theta_1(\mathrm{Bd}\,D_2\times Q)=B\times Q_{l+1}$

(следствие 29.5 применяется во второй раз для построения гомеоморфизма $\mathrm{Bd}\,D_2\times Q$ на $B\times Q_{l+1}$, принадлежащего такому гомотопическому классу, чтобы можно было применить теорему 19.4).

Легко проверить, что

$$N\setminus \mathrm{Int}\,C\times Q_{l+1}\hookrightarrow D_3\times Q$$

есть гомотопическая эквивалентность и, значит, $N\setminus \mathrm{Int}\,C\times Q_{l+1}$ — компактное стягиваемое Q-многообразие. Таким образом, θ_1 продолжается до нужного нам гомеоморфизма $f_2'\colon M\to N$. Затем мы продолжаем f_2' до гомеоморфизма $f_2\colon T^n\times Q\to T^n\times Q$, полагая $f_2|_{Y_1}=f_1|_{Y_1}$. Проверку того, что $f_2\simeq \mathrm{id}$, мы оставляем читателям в качестве упражнения.

3. Построение $\tilde f_2$. Поскольку $\alpha e^n|_{B_2^n}=\mathrm{id}$, мы имеем $f_2(e^n(0), 0)=(e^n\times \mathrm{id})\,(\alpha\times \mathrm{id})\,f_2(e^n(0), 0)$, где первый нуль лежит в R^n, а второй совпадает с $(0, 0, \ldots)\in Q$. Из элементарной теории накрывающих пространств вытекает существование единственного гомеоморфизма $\tilde f_2\colon R^n\times Q\to R^n\times Q$, который накрывает f_2 (т.е. $(e^n\times \mathrm{id})\,\tilde f_2=f_2(e^n\times \mathrm{id})$) и для которого $\tilde f_2(0, 0)=$ $=(\alpha\times \mathrm{id})f_2(e^n(0), 0)$.

Ограничение $\tilde f_2|_{B_1^n\times Q}$ дает нам поднятие отображения $f_2(e^n\times \mathrm{id})|_{B_1^n\times Q}$, которое отправляет точку $(0, 0)$ в $(\alpha\times \mathrm{id})f_2(e^n(0), 0)$. Но другим таким поднятием является отображение $(\alpha\times \mathrm{id})f_2(e^n\times \mathrm{id})|_{B_1^n\times Q}$, и по единственности поднятия $\tilde f_2$ совпадает с $(\alpha\times \mathrm{id})f_2(e^n\times \mathrm{id})$ на $B_1^n\times Q$. Отсюда мы заключаем, что $\tilde f_2$ — гомеоморфизм, для которого $\tilde f_2(B_1^n\times Q)=$ $=h^1(Y\times Q_{k+1})$. Итак, чтобы закончить доказательство теоремы, надо построить гомеоморфизм $B_2^n\times Q$ на себя, совпадающий с $\tilde f_2$ на $B_1^n\times Q$ и тождественный на $\mathrm{Bd}\,B_2^n\times Q$.

Имеется еще одно полезное свойство отображения $\tilde f_2$, которое вытекает из еще неиспользованного факта $f_2\simeq \mathrm{id}$. Используя то, что $f_2\simeq \mathrm{id}$ и $\tilde f_2$ накрывает f_2, можно доказать, что $\tilde f_2$ *ограни-*

чено. Это означает, что множество

$$\{\|p\tilde{f}_2(x, q) - p(x, q)\| \mid (x, q) \in R^n \times Q\}$$

ограничено сверху, где $p: R^n \times Q \to R^n$ — проектирование и $\|\ \|$ — обычная норма в R^n. На самом деле точная верхняя грань достигается на $B_4^n \times Q$. Один из способов увидеть это — доказать сначала, что если $\varphi: R^n \to R^n$ — произвольное накрытие отображения $\mathrm{id}: T^n \to T^n$, то $(\varphi \times \mathrm{id})\tilde{f}_2 = \tilde{f}_2(\varphi \times \mathrm{id})$. Отсюда легко вытекает, что упомянутая выше точная верхняя грань достигается на $B_4^n \times Q$, поскольку (1)φ сохраняет норму и (2) для каждого $x \in R^n$ можно выбрать φ так, что $\varphi(x) \in B_4^n$.

Чтобы проверить равенство $(\varphi \times \mathrm{id})\tilde{f}_2 = \tilde{f}_2(\varphi \times \mathrm{id})$, возьмем такую гомотопию $F: T^n \times Q \times [0, 1] \to T^n \times Q$, что $F_0 = \mathrm{id}$ и $F_1 = f_2$. Пусть $\tilde{F}$ — произвольное отображение, которое делает гомотопически коммутативной следующую диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} R^n \times Q \times [0, 1] & \xrightarrow{\tilde{F}} & R^n \times Q \\ {\scriptstyle e^n \times \mathrm{id}} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle e^n \times \mathrm{id}} \\ T^n \times Q \times [0, 1] & \xrightarrow{F} & T^n \times Q. \end{array}$$

Тогда $\tilde{F}_1: R^n \times Q \to R^n \times Q$ накрывает f_2, поэтому существует такое накрытие $\varphi_0 R^n \to R^n$ отображения $\mathrm{id}: T^n \to T^n$, что $f_2 = (\varphi_0 \times \mathrm{id})\tilde{F}_1$. В силу единственности поднятия $(\varphi \times \mathrm{id})\tilde{F} = \tilde{F}(\varphi \times \mathrm{id})$ для всякого φ. Итак, $(\varphi \times \mathrm{id})f_2 = f_2(\varphi \times \mathrm{id})$.

4. Построение f_3. Выберем t, $1 < t < 2$, так, что $\tilde{f}_2(B_1^n \times Q) \subset \mathrm{Int}\, B_t^n \times Q$, и обозначим через $\beta: \mathrm{Int}\, B_2^n \to R^n$ радикальный гомеоморфизм, тождественный на B_t^n. Определим теперь $f_3: \mathrm{Int}\, B_2^n \times Q \to \mathrm{Int}\, B_2^n \times Q$ равенством $f_3 = (\beta \times \mathrm{id})^{-1}\tilde{f}_2(\beta \times \mathrm{id})$. Заметим, что $f_3|_{B_1^n \times Q} = \tilde{f}_2|_{B_1^n \times Q}$. В силу ограниченности $\tilde{f}_2$ функция

$$\|pf_3(x, q) - p(x, q)\|$$

равномерно стремится к 0 при $\|x\| \to 2$.

5. Построение f_4. Мы хотим, чтобы f_4 было гомеоморфизмом, тождественным на $\mathrm{Bd}\, B_2^n \times Q$ и совпадающим с $\tilde{f}_2$ на $B_1^n \times Q$. Мы уже отмечали, что этого будет достаточно для доказательства теоремы. Обозначим через P дизъюнктную сумму $\mathrm{Int}\, B_2^n \times Q$ и $\mathrm{Bd}\, B_2^n$, с топологией факторпространства, определенного отображением $\theta: B_2^n \times Q \to P$, где $\theta = \mathrm{id}$ на $\mathrm{Int}\, B_2^n \times Q$ и $\theta(x, q) = x$ для всех $(x, q) \in \mathrm{Bd}\, B_2^n \times Q$. Рассматривая $\mathrm{Int}\, B_2^n \times Q$ как подпространство P, видим, что в силу отмеченной

выше равномерной сходимости отображение f_3 продолжается до гомеоморфизма $\tilde{f}_3$: $P \to P$, тождественного на Bd B_2^n.

Мы нуждаемся в гомеоморфизме γ: $B_2^n \times Q \to P$, тождественном на $B_t^n \times Q$. Его легко можно получить, применяя теорему 12.2 к каждому $L \times Q$, где L — луч, идущий из начала координат в Bd B_2^n. В самом деле, заметим, что $\theta(L \times Q)$ получается из $L \times Q$ стягиванием $(L \cap \mathrm{Bd}\, B_2^n) \times Q$ в точку. Применяя 12.2 (Q гомеоморфен своему конусу) к каждому $L \times Q$, получаем гомеоморфизм γ, который переводит каждое $L \times Q$ в $\theta(L \times Q)$.

Пусть теперь $\tilde{f}_4$: $B_2^n \times Q \to B_2^n \times Q$ задается равенством $\tilde{f}_4 = \gamma^{-2}\tilde{f}_3\gamma$. Выбирая γ так, что $\gamma(x, 0) = x$ для всех $x \in \mathrm{Bd}\, B_2^n$ и $0 \in Q$, мы видим, что $f_4(x, 0) = (x, 0)$ для всех $x \in \mathrm{Bd}\, B_2^n$. Имеем также $\tilde{f}_4|_{B_1^n \times Q} = \tilde{f}_2|_{B_1^n \times Q}$. Остается единственный шаг — преобразовать $\tilde{f}_4$ так, чтобы получить требуемый гомеоморфизм f_4, тождественный на Bd $B_2^n \times Q$. Условие $\tilde{f}_4(x, 0) = (x, 0)$ дает нам возможность получить гомотопию $\tilde{f}_4|_{\mathrm{Bd}\, B_2^n \times Q} \simeq \mathrm{id}$, происходящую в Bd $B_2^n \times Q \cup \tilde{f}_4(\mathrm{Bd}\, B_2^n \times Q)$ и не затрагивающую множество $\tilde{f}_4(B_1^n \times Q)$. Используя 19.4, мы можем получить гомеоморфизм $B_2^n \times Q$ на себя, сосредоточенный на небольшой окрестности множества Bd $B_2^n \times Q \cup \tilde{f}_4(\mathrm{Bd}\, B_2^n \times Q)$, который в композиции с $\tilde{f}_4|_{\mathrm{Bd}\, B_2^n \times Q}$ дает тождественное отображение. Композиция этого гомеоморфизма с $\tilde{f}_4$ и будет искомым гомеоморфизмом f_4. ■

Замечания

§ 34. Теорема 34.1, являющаяся чисто техническим результатом, появляется у Чепмэна [14]. Используя элементарную технику, можно усилить доказательство и получить, что все M триангулируемо.

§ 35. Теорема 35.1 о выпрямлении ручек появляется у Чепмэна [14]. См. также (Зибенман, [44]). Идея с тором — это идея сворачивания — разворачивания тора, предложенная Кёрби и Зибенманом [34], чтобы триангулировать конечномерные многообразия.

XI. ТРИАНГУЛЯЦИОННАЯ ТЕОРЕМА

Цель этой главы — доказать теорему о триангулируемости Q-многообразий. Она утверждает, что всякое Q-многообразие гомеоморфно произведению некоторого полиэдра на Q. Наша стратегия — разобрать сначала компактный случай (36.2), а затем применить полученный результат в некомпактном случае (37.2).

§ 36. Компактный случай. Мы докажем в 36.2, что всякое компактное Q-многообразие триангулируемо. При доказательстве используется теорема о выпрямлении ручек наряду со следующим известным утверждением.

36.1. Лемма. *Каждый ANR-компакт X добавлением конечного числа клеток может быть превращен в стягиваемое пространство.*

Доказательство. Мы будем кратки. Поскольку X есть ANR-компакт, он гомотопически доминируется компактным полиэдром. Это влечет, что (1) X имеет конечное число компонент, (2) фундаментальная группа каждой компоненты конечно порождена (к.п.) и (3) сингулярные гомологии X к.п. Добавляя к X конечное число одномерных клеток, получаем связное компактное ANR-пространство X_0. Поскольку $\pi_1(X_0)$ к.п., мы можем добавить к X_0 конечное число двумерных клеток и получить компактное односвязное ANR-пространство X_1. Чтобы продолжить этот процесс, мы должны быть уверены, что $\pi_2(X_1)$ к.п. По теореме Гуревича $\pi_2(X_1)$ изоморфна $H_2(X_1)$, а эта последняя группа к.п., поскольку X_1 гомотопически доминируется компактным полиэдром. Значит мы можем добавить к X_1 конечное число трехмерных клеток и получить компактное двусвязное ANR-пространство X_2.

Мы можем продолжить построение компактных n-связных ANR-пространств X_n этим же способом. Чтобы показать, что процесс конечен, предположим, что $H_n(X_0) = 0$ для $n \geqslant N \geqslant 3$. Если пространства $X_0, \ldots, X_{N-2}$ уже построены, то X_{N-2} одно-

7   28 0 8

связно и

$$H_n(X_{N-2}) = \begin{cases} 0, & n \geqslant N, \\ 0, & n \geqslant N-2. \end{cases}$$

На следующем шаге мы получаем односвязное пространство X_{N-1} с

$$H_n(X_{N-1}) = \begin{cases} 0, & n \geqslant N+1, \\ F, & n = N, \\ 0, & n \leqslant N-1. \end{cases}$$

Здесь группа F свободна и возникает как ядро граничного гомоморфизма ∂:

$$0 = H_{N-1}(X_{N-1}) \leftarrow H_{N-1}(X_{N-2}) \xleftarrow{\partial} H_N(X_{N-1}, X_{N-2}) \leftarrow$$
$$\leftarrow H_N(X_{N-1}) \leftarrow H_N(X_{N-2}) = 0.$$

Следовательно, описанная выше процедура дает односвязное пространство X_N с $H_n(X_N) = 0$ для всех n. Но компактное односвязное ациклическое ANR-пространство должно быть стягиваемо. ■

36.2. Теорема. *Всякое компактное Q-многообразие триангулируемо.*

Доказательство. Сначала укажем бесконечномерный аналог добавления клеток, которое применялось в 36.1. Пусть M — Q-многообразие и φ: $\mathrm{Bd}\, I^n \to M$ — отображение. Приклеивая по этому отображению куб I^n к M, получаем пространство $M \underset{\varphi}{\cup} I^n$, которое есть результат добавления n-мерной клетки к M. Пространство $M \underset{\varphi}{\cup} I^n$ гомотопически эквивалентно компактному Q-многообразию. В самом деле, пусть θ есть композиция

$$\mathrm{Bd}\, I^n \times Q \xrightarrow{\text{проектирование}} \mathrm{Bd}\, I^n \xrightarrow{\varphi} M,$$

и пусть ψ: $\mathrm{Bd}\, I^n \times Q \to M$ — Z-вложение, гомотопное θ. Тогда $M \underset{\psi}{\cup} (I^n \times Q)$ является Q-многообразием по теореме 16.2 о воротнике. Пространство $M \underset{\varphi}{\cup} I^n$ гомотопически эквивалентно

подмножеству $M \underset{\psi}{\cup} (I^n \times \{Q\})$ пространства $M \underset{\psi}{\cup} (I^n \times Q)$. Это получается простым рассуждением из теории гомотопий (см. [54, стр. 239]) в силу того, что φ гомотопно $\psi | I^n \times \{0\}$: $I^n \times \{0\} \to M$, где I^n отождествляется с подмножеством $I^n \times \{0\}$ пространства $I^n \times Q$. Также ясно, что $M \underset{\psi}{\cup} (I^n \{0\})$ гомотопически эквивалентно $M \underset{\psi}{\cup} (I^n \times Q)$. Итак, Q-многообразие $M \underset{\psi}{\cup} (I^n \times Q)$ гомотопически эквивалентно пространству $M \underset{\varphi}{\cup} I^n$.

Согласно 16.2, существует такое открытое вложение h: $R^n \times \times Q \to M \underset{\psi}{\cup} (I^n \times Q)$, что $h(B_1^n \times Q)$ совпадает с подмножеством пространства $M \underset{\psi}{\cup} (I^n \times Q)$, естественно отождествляемым с $I^n \times Q$.

Используя 36.1 и только что сделанное замечание, мы можем, начиная с компактного Q-многообразия M, построить последовательность компактных Q-многообразий

$$M = M_0,\ M_1,\ \ldots,\ M_{p-1},\ M_p,$$

где каждое M_{i+1} получается из M_i, как и выше, добавлением копии некоторого $I^n \times Q$, а M_p стягиваемо. В силу 22.1 имеем $M_p \cong Q$ и, значит, M_p тривиально триангулируемо. Дальше действуем по индукции. Индукционный шаг состоит в доказательстве того, что M_i триангулируемо при условии триангулируемости M_{i+1}.

Согласно сказанному выше, имеется такое открытое вложение $h: R^n \times Q \to M_{i+1}$, что $M_i = M_{i+1} \setminus h(\operatorname{Int} B_1^n \times Q)$. Заменяя M_{i+1} на $X \times Q$, где X — полиэдр, и применяя теорему о выпрямлении ручек, получаем такой гомеоморфизм $g: X \times Q \to X \times Q$, что $gh\ (B_1^n \times Q) = Y \times Q_{k+1}$, где $Y \subset X \times I^k$ — прямой полиэдр. Тогда $g|_{M_i}$ дает гомеоморфизм M_i на триангулированное Q-многообразие $(X \times I^k \setminus \operatorname{Int} Y) \times Q_{k+1}$. ■

§ 37. Общий случай. В 37.2 мы доказываем триангуляционную теорему без каких бы то ни было ограничений. При доказательстве мы используем следующее обобщение теоремы 36.2.

37.1. Лемма. *Пусть (M, M_0) — пара компактных Q-многообразий, $M_0 \subset M$ — Z-множество и $h_0: M_0 \to X_0 \times Q$ — триангуляция M_0. Тогда существует такая триангуляция h: $M \to X \times Q$, что X_0 является подполиэдром X и h продолжает h_0.*

Доказательство. Пусть f: $M \to X' \times Q$ — произвольная триан гуляция M. Определим α: $X_0 \to X'$ как композицию

$$X_0 \xrightarrow{x0} X_0 \times Q \xrightarrow{h_0^{-1}} M_0 \hookrightarrow M \xrightarrow{f} X' \times Q \xrightarrow{\text{проектирование}} X'.$$

Пусть β: $X_0 \to X'$ — произвольное PL-отображение, гомотопное α. Образуем цилиндр отображения $M(\beta)$ (напомним, что цилиндр отображения появляется в первой части доказательства теоремы 31.2, где X_0 и X' естественно отождествлены с подмножествами $M(\beta)$). Поскольку β кусочно-линейно, X_0 и X' — подполиэдры $M(\beta)$.

Положив $X = M(\beta)$, замечаем, что включение $X' \hookrightarrow X$ является простой гомотопической эквивалентностью. В самом деле, сжатие c: $M(\beta) \to X'$ на базу является конечной композицией элементарных вдавливаний (см. § 29). Значит, согласно 29.4, существует гомеоморфизм

$$g: X' \times Q \to X \times Q,$$

гомотопный включению. Тогда $h = gf$: $M \to X \times Q$ есть триангуляция M, и легко видеть, что $h | M_0$: $M_0 \to X \times Q$ гомотопно отображению $M_0 \xrightarrow{h_0} X_0 \times Q \to X \times Q$. Согласно 19.4, мы можем затем преобразовать h так, чтобы оно продолжало h_0. ■

37.2. Теорема. *Всякое Q-многообразие триангулируемо.*

Доказательство. Пусть M — произвольное Q-многообразие. Сделаем основной шаг в доказательстве. После этого легко будет получить и общий результат.

Утверждение. Если компакты C_1 и C_2 имеют в M триангулируемые окрестности, то их объединение $C_1 \cup C_2$ также имеет триангулируемую окрестность.

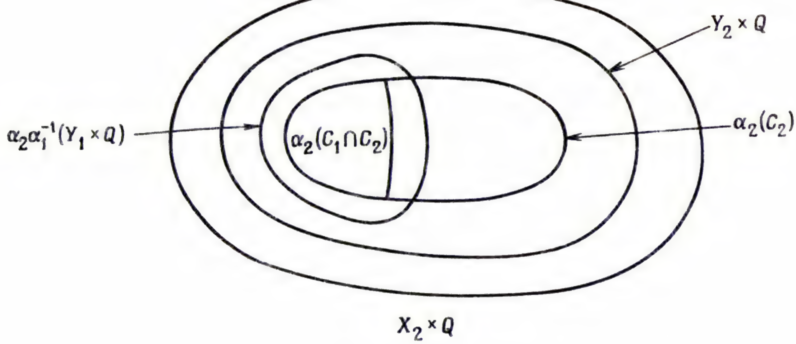
Доказательство утверждения. Пусть U_i — открытое множество, содержащее C_i, которое имеет триангуляцию α_i: $U_i \to X_i \times Q$, $i = 1, 2$. Поскольку $\alpha_1(C_1 \cap C_2)$ — компакт в $X_1 \times Q$, можно найти такой прямой полиэдр $Y_1 \subset X_1 \times I^{k_1}$ (для некоторого $k_1 \geqslant 0$), что

$$\alpha_1 (C_1 \cap C_2) \subset \operatorname{Int} (Y_1 \times Q_{k_1+1}) \subset Y_1 \times Q_{k_1+1} \subset \alpha_1(U_1 \cap U_2).$$

Для упрощения обозначений будем предполагать, что $k_1 = 0$ и, значит, $Y_1 \subset X_1$. Выберем прямой полиэдр $Y_2 \subset X_2$ так, что

$$\alpha_2\alpha_1^{-1} (Y_1 \times Q) \cup \alpha_2(C_2) \subset \operatorname{Int} Y_2 \times Q.$$

См. рисунок.



Наша стратегия — найти открытое множество $\tilde{U}_2 \subset U_2$, содержащее C_2, и триангуляцию $\tilde{\alpha}_2$: $\tilde{U}_2 \to \tilde{X}_2 \times Q$, такие, что $\tilde{X}_2$ содержит Y_1 как прямой подполиэдр и $\tilde{\alpha}_2|_{\alpha_1^{-1}(Y_1 \times Q)} = \alpha_1|_{\alpha_1^{-1}(Y_1 \times Q)}$. Рассмотрим компактное Q-многообразие $Y_2 \times Q \setminus \alpha_2\alpha_1^{-1}(\operatorname{Int} Y_1 \times Q)$. Применяя лемму 37.1 к этому многообразию и дополняя затем его множеством $\alpha_2\alpha_1^{-1}(Y_1 \times Q)$, мы можем найти новую триангуляцию β: $Y_2 \times Q \to Z \times Q$, такую, что Z содержит Y_1 и $\operatorname{Bd} Y_2$ как подполиэдры, $\beta|_{\operatorname{Bd} Y_2 \times Q} = \mathrm{id}$ и $\beta = \alpha_1\alpha_1^{-1}$ на $\alpha_2\alpha_1^{-1}(Y_1 \times Q)$. Если $\tilde{U}_2 = \alpha_1^{-2}(\operatorname{Int} Y_2 \times Q)$, то $\tilde{\varphi}_2 = \beta\alpha_2$ является гомеоморфизмом $\tilde{U}^2$ на $\tilde{X}_2 \times Q$, где $\tilde{X}_2 = Z \setminus \operatorname{Bd} Y_2$. Кроме того, мы видим, что $\tilde{\alpha}_2 = \alpha_1$ на $\alpha_1^{-1}(Y_1 \times Q)$.

Мы можем теперь показать, что существует триангулируемая окрестность множества $C_1 \cup C_2$. Выберем открытое множество $V_1 \subset X_1$, содержащее $\operatorname{Int} Y_1$, так, что $\alpha_1^{-1}(V_1 \times Q)$ содержит C_1, и выберем открытое подмножество $V_2 \subset \tilde{X}_2$, содержащее $\operatorname{Int} Y_1$, так, что $\tilde{\alpha}_1^{-1}(V_2 \times Q)$ содержит C_2 и $\tilde{\alpha}_2(\alpha_1^{-1}(V_1 \times Q) \cap \tilde{\alpha}_2^{-1}(V_2 \times Q)) = \operatorname{Int} Y_1 \times Q$. Пусть $X = V_1 \cup V_2$ — полиэдр, образованный склеиванием полиэдров V_1 и V_2 по их общему подполиэдру $\operatorname{Int} Y_1$. Определим отображение

$$\alpha: \alpha_1^{-1}(V_1 \times Q) \subset \tilde{\alpha}_2^{-1}(V_2 \times Q) \to X \times Q,$$

полагая $\alpha = \alpha_1$, на $\alpha_1^{-1}(Y_1 \times Q)$ и $\alpha = \tilde{\alpha}_2$ на $\tilde{\alpha}_2^{-1}(V_2 \times Q)$. Тогда $\alpha_1^{-1}(V_1 \times Q) \cup \tilde{\alpha}_2^{-1}(V_1 \times Q)$ есть открытое множество, содержащее $C_1 \cup C_2$ и триангулированное отображением α. ■

Теперь мы возвращаемся к доказательству теоремы. Применяя утверждение по индукции, мы замечаем, что каждый компакт в M лежит в триангулируемом открытом множестве. Поскольку всякий компакт в полиэдре лежит в прямом

подполиэдре, мы заключаем, что можно записать $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$, где каждое M_n есть компактное Q-многообразие, лежащее во внутренности M_{n+1}, так, что $\operatorname{Bd} M_n$ есть Z-множество в M_n и $M \setminus \operatorname{Int} M_n$.

Согласно 36.2, существует триангуляция f: $\bigcup_{n=1}^{\infty} \operatorname{Bd} M_n \to X_1 \times Q$. Применяя 37.1, мы можем продолжить f_1 до триангуляции всего M. При этом лемма 37.1 применяется к M_1 и к каждому «кольцу» $M_{n+1} \setminus \operatorname{Int} M_n$. ■

Замечания

§ 36. Теорема 36.2 о триангуляции компактов появилась у Чепмэна [15] и приведенное доказательство совпадает с оригинальным.

§ 37. Относительная триангуляционная теорема 37.1 была установлена Чепмэном [17] как инструмент для доказательства некомпактной триангуляционной теоремы 37.2. Однако доказательство, данное в [17], отличается от только что проведенного. Оно использует относительную теорему о выпрямлении ручек для локального изменения различных триангуляций так, чтобы они вместе составили глобальную триангуляцию. Эта идея больше в духе конечномерной программы Кёрби и Зибенмана [34]. В [44] Зибенман дал доказательство, которое остроумно использует только теорему о выпрямлении ручек, приведенную в гл. X. Именно это доказательство и дано в 37.2.

XII. КЛАССИФИКАЦИОННАЯ ТЕОРЕМА

В этой главе мы доказываем классификационную теорему. Она утверждает, что собственное отображение $f\colon X \to Y$ полиэдров является бесконечной простой гомотопической эквивалентностью тогда и только тогда, когда $f \times \mathrm{id}\colon X \times Q \to Y \times Q$ собственно гомотопно гомеоморфизму (читателю стоит обратиться к определениям из § 29 и 30). В 38.1 мы разбираем компактный случай, а в 39.1 применяем его для доказательства общего утверждения.

§ 38. Компактный случай. В 38.1 мы доказываем классификационную теорему для компактных полиэдров. Ее доказательство использует теорему о выпрямлении ручек наряду с некоторыми результатами из простой гомотопической теории (такими, как теорема суммы, установленная в 29.2).

38.1. Теорема. *Отображение $f\colon X \to Y$ полиэдров является простой гомотопической эквивалентностью тогда и только тогда, когда $f \times \mathrm{id}\colon X \times Q \to Y \times Q$ гомотопно гомеоморфизму.*

Доказательство. Необходимость уже доказана в 29.4. Пусть теперь $f \times \mathrm{id}$ гомотопно гомеоморфизму. Мы будем вести индукцию по $\dim X$ и рассмотрим сначала случай $\dim X = 0$. Тогда Y является конечной суммой стягиваемых компонент, а f дает биекцию между вершинами X и компонентами Y. В силу 29.3 мы заключаем, что f есть простая гомотопическая эквивалентность.

При индуктивном переходе от $\dim X \leqslant n-1$ к $\dim X = n$ рассмотрим частный случай

$$X = X_{n-1} \cup \Delta^n,$$

где X_{n-1}—$(n-1)$-мерный остов X, а Δ^n—n-мерный симплекс. Общий случай $X = X_{n-1} \cup \Delta_1^n \cup \ldots \cup \Delta_p^n$ разбирается аналогично.

Пусть $\varphi\colon R^n \to \mathrm{Int}\ \Delta^n$—$PL$-гомеоморфизм. Тогда $\varphi \times \mathrm{id}\colon R^n \times Q \to X \times Q$—открытое вложение. По условию отображение $f\colon X \to Y$ таково, что $f \times \mathrm{id}$ гомотопно гомеоморфизму h:

$X \to Q \to Y \times Q$. По теореме о выпрямлении ручек существует такой гомеоморфизм g: $Y \times Q \to Y \times Q$, сосредоточенный на $h(\varphi(B_2^n) \times Q)$, что $gh(\varphi(B_1^n) \times Q) = Z \times Q_{k+1}$, где полиэдр $Z \subset Y \times I^k$ прямой. Следовательно, g гомотопно тождественному отображению. Запишем $X = X_1 \cup X_2$, где $X_1 = \varphi(B_1^n)$, $X_2 = X \setminus \operatorname{Int} X_1$, и положим $X_0 = X_1 \cap X_2$. Представим также $Y \times I^k$ в виде $Y_1 \cup Y_2$, где $Y_1 = Z$, $Y_2 = Y \times I^k \setminus \operatorname{Int} Z$, и положим $Y_0 = Y_1 \cap Y_2$. Тогда мы видим, что $gh(X_i \times Q) = Y_i \times Q_{k+1}$ для каждого i. Определим отображения α: $X \to Y \times I^k$ и α_i: $X_i \to Y_i$ с помощью следующих коммутативных прямоугольников:

$$\begin{array}{ccc} X \times Q & \xrightarrow{gh} & Y \times Q \\ \uparrow{\scriptstyle \times 0} & & \downarrow{\scriptstyle \text{проектирование}} \\ X & \xrightarrow{\alpha} & Y \times I^k \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} X_i \times Q & \xrightarrow{gh} & Y_i \times Q_{k+1} \\ \uparrow{\scriptstyle \times 0} & & \downarrow{\scriptstyle \text{проектирование}} \\ X_i & \xrightarrow{\alpha_i} & Y_i \end{array}$$

Каждое α_i является ограничением α.

Чтобы применить 29.2 (теорему суммы), мы должны доказать, что каждое α_i есть простая гомотопическая эквивалентность. Поскольку X_1 стягиваемо и α_1: $X_1 \to Y_1$ — гомотопическая эквивалентность, из 29.3 вытекает, что α_1 есть простая гомотопическая эквивалентность. Далее, легко проверить, что $\alpha_0 \times \mathrm{id}_Q$ гомотопно композиции

$$X_0 \times Q \xrightarrow{gh} Y_0 \times Q_{k+1} \xrightarrow{\mathrm{id} \times \theta} Y_0 \times Q,$$

где θ: $Q_{k+1} \to Q$ — произвольный гомеоморфизм. Поэтому из индуктивного предположения вытекает, что α_0 есть простая гомотопическая эквивалентность (мы могли бы также применить 29.3, чтобы заключить, что α_0 — простая гомотопическая эквивалентность). Теперь рассмотрим композицию $X_{n-1} \xhookrightarrow{i} X_2 \xrightarrow{\alpha_2} Y_2$. Включение i является простой гомотопической эквивалентностью, как конечная композиция элементарных раздутий (этого добиваемся надлежащим выбором φ). Согласно 29.4, отображение $i \times \mathrm{id}_Q$ гомотопно гомеоморфизму $X_{n-1} \times Q$ на $X_2 \times Q$. Поскольку $\alpha_2 \times \mathrm{id}_Q$ гомотопно гомеоморфизму, то это же верно и для $\alpha_2 i \times \mathrm{id}_Q$. По индуктивному предположению $\alpha_2 i$ есть простая гомотопическая эквивалентность, а тогда и α_2 является простой гомотопической эквивалентностью в силу 29.1. Наконец, используя 29.2, заключаем, что α: $X \to Y \times I^k$ есть простая гомотопическая эквивалентность.

Теперь для доказательства того, что f: $X \to Y$ — простая гомотопическая эквивалентность, берем гомотопически коммута-

тивный треугольник

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "f"'] & Y \times I^k \arrow[d, "\text{проектирование}"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

и применяем теорему 29.1 наряду с тем фактом, что проектирование $Y \times I^k$ на Y является простой гомотопической эквивалентностью, как конечная композиция элементарных вдавливаний.

38.2. Следствие. *Любой гомеоморфизм компактных полиэдров является простой гомотопической эквивалентностью.*

§ 39. ОБЩИЙ СЛУЧАЙ. В 39.1 мы доказываем классификационную теорему для произвольных полиэдров. Ее доказательство использует 38.1 наряду с относительной триангуляционной теоремой 37.1.

39.1. Теорема. *Собственное отображение f: $X \to Y$ между полиэдрами является бесконечной простой гомотопической эквивалентностью тогда и только тогда, когда $f \times \mathrm{id}$: $X \times Q \to Y \times Q$ собственно гомотопно гомеоморфизму.*

Доказательство. Как и в 38.1, нам надо доказать только достаточность. Итак, пусть $f \times \mathrm{id}$ собственно гомотопно гомеоморфизму h: $X \times Q \to Y \times Q$. Запишем $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$ и $Y = \bigcup_{i=1}^{\infty} Y_i$, где X_i и Y_i суть прямые полиэдры, выбранные так, что

$$h(X_i \times Q) \subset \operatorname{Int} Y_i \times Q \subset Y_i \times Q \subset h(\operatorname{Int} X_{i+1} \times Q)$$

для всех $i \geqslant 1$.

Считая, что все полиэдры $\operatorname{Bd} X_i$ и $\operatorname{Bd} Y_i$ попарно дизъюнктны, мы можем образовать полиэдр Z, содержащий $\operatorname{Bd} X_i$ и $\operatorname{Bd} Y_i$ как подполиэдры, и найти такой гомеоморфизм g: $Y \times Q \to Z \times Q$, что $g|_{\operatorname{Bd} Y_i \times Q} = \mathrm{id}$ и $g|_{h(\operatorname{Bd} X_i \times Q)} = h^{-1}$. Полиэдр Z строится с применением леммы 37.1 (аналогичную конструкцию см. также в последнем пункте доказательства теоремы 37.2).

Пусть h_0: $X \to Y$ определено так, что коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{tikzcd} X \times Q \arrow[r, "h"] & Y \times Q \arrow[d, "\mathrm{pr}"] \\ X \arrow[u, "\times 0"] \arrow[r, "h_0"] & Y \end{tikzcd}$$

Тогда h_0 собственно гомотопно f, поэтому достаточно доказать, что h_0 есть бесконечная простая гомотопическая эквивалентность. Определим g_0: $Y \to Z$ и $(gh)_0$: $X \to Z$ по аналогии с h_0. Заметим, что $(gh)_0$ собственно гомотопно $g_0 h_0$. Мы дока-

жем, что $(gh)_0$ и g_0—бесконечные простые гомотопические эквивалентности. Тогда по теореме 30.1 и h_0 будет бесконечной простой гомотопической эквивалентностью.

Мы дадим детали только для доказательства того, что g_0 есть бесконечная простая гомотопическая эквивалентность. Для $(gh)_0$ они аналогичны. Запишем $Z = \bigcup_{i=1}^{\infty} Z_i$, где Z_i—такие компактные подполиэдры, что

$$g(Y_i \times Q) = Z_i \times Q \quad \text{для каждого } i$$

(определение Z_i вытекает из конструкции Z). Разобъем Y и Z так, чтобы применялась теорема суммы 30.2.

Представим Y как $Y_a \cup Y_b$, где

$$Y_a = Y_1 \cup (Y_3 \setminus \operatorname{Int} Y_2) \cup (Y_5 \setminus \operatorname{Int} Y_4) \cup \ldots,$$
$$Y_b = (Y_2 \setminus \operatorname{Int} Y_1) \cup (Y_4 \setminus \operatorname{Int} Y_3) \cup \ldots,$$

и положим $Y_c = Y_a \cap Y_b$. Аналогично представим Z в виде $Z_a \cup Z_b$, где

$$Z_a = Z_1 \cup (Z_3 \setminus \operatorname{Int} Z_2) \cup (Z_5 \setminus \operatorname{Int} Z_4) \cup \ldots,$$
$$Z_b = (Z_2 \setminus \operatorname{Int} Z_1) \cup (Z_4 \setminus \operatorname{Int} Z_3) \cup \ldots,$$
$$Z_c = Z_a \cap Z_b.$$

Пусть $(g_0)_\alpha$: $Y_\alpha \to Z_\alpha$—ограничение отображения g_0 при $\alpha = a, b, c$. Чтобы применить теорему 30.2, нам надо доказать, что $(g_0)_a$, $(g_0)_b$ и $(g_0)_c$—бесконечные простые гомотопические эквивалентности.

Для $(g_0)_c$ это тривиально, поскольку $(g_0)_c = \mathrm{id}$. Теперь отметим следующий факт, доказательство которого оставляет читателю в качестве упражнения (см. [22, стр.17]).

Если θ: $L_1 \to L_2$—простая гомотопическая эквивалентность между компактными полиэдрами, то все элементарные раздутия могут быть сделаны сначала. Это означает существование такого компактного полиэдра J, что $L_1 \nearrow J \searrow L_2$ и диаграмма

$$\begin{tikzcd}
 & J & \\
L_1 \arrow[ur, hook] \arrow[rr, "\theta"'] & & L_2 \arrow[ul, hook']
\end{tikzcd}$$

гомотопически коммутативна.

Исходя из этого факта и заключая в силу 38.1, что все ограничения

$$(g_0)_a\colon\ Y_1 \to Z_1,$$
$$(g_0)_a\colon\ Y_{2i+1} \setminus \operatorname{Int} Y_{2i} \to Z_{2i+1} \setminus \operatorname{Int} Z_{2i}$$

суть простые гомотопические эквивалентности, по определению получаем, что $(g_0)_a$ есть бесконечная простая гомотопическая эквивалентность. Так же рассуждаем и относительно $(g_0)_b$. ■

Замечания

§ 38. Доказательство классификационной теоремы для компактного случая, данное в 38.1, появилось у Чепмэна [16].

§ 39. Доказательство классификационной теоремы 39.1 для некомпактного случая было сначала дано Чепмэном [18]. То доказательство было основано на относительной теореме о выпрямлении ручек, полученной Чепмэном [17]. Доказательство теоремы 39.1, данное здесь, заимствовано у Зибенмана [44], который не привлекал относительную теорему о выпрямлении ручек.

XIII. КЛЕТОЧНО-ПОДОБНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

Отображение $f\colon X\to Y$ между ANR-пространствами называется *клеточно подобным* (кратко CE), если оно является собственным отображением «на» и прообраз $f^{-1}y$ каждой точки имеет свойство UV^∞ в X. Это просто означает, что для каждой окрестности U множества $f^{-1}y$ существует такая окрестность $V\subset U$, что включение $V\hookrightarrow U$ гомотопно постоянному отображению V в U. Эквивалентным образом $f^{-1}y$ имеет шейп точки в смысле Борсука [8]. Легко видеть, что если все прообразы $f^{-1}y$ стягиваемы, то f должно быть CE-отображением.

Цель этой главы — доказать, что если X — ANR-компакт, то $X\times[0, 1)$ является CE-образом Q-многообразия (см. 41.3). Доказательство не простое, но элементарное в том смысле, что использует только ту часть теории Q-многообразий, которая изложена в первых четырех главах этой книги. Этот результат понадобится в главе XIV для доказательства ANR-теоремы. В § 40 мы даем полезную переформулировку понятия CE-отображения, которая также будет использована в главе XIV.

§ 40. Тонкая гомотопическая эквивалентность. Отображение $f\colon X\to Y$ между ANR-пространствами называется *тонкой гомотопической эквивалентностью*, если f — собственное отображение «на» и для каждого открытого покрытия $\mathscr{U}$ пространства Y существует такое собственное отображение $g\colon Y\to X$, что $gf\colon X\to X$ собственно гомотопно тождественному отображению посредством гомотопии, ограниченной открытым покрытием

$$f^{-1}\mathscr{U}=\{f^{-1}U\mid U\in\mathscr{U}\}$$

(см. § 17, чтобы вспомнить смысл слова «ограниченной»).

Следующий результат утверждает, что понятия «CE-отображение» и «тонкая гомотопическая эквивалентность» эквивалентны. Он будет использован в § 41 и в гл. XIV. Доказательство см. в (Хавер [28]).

40.1. Теорема. *Отображение $f\colon X\to Y$ между ANR-пространствами является CE-отображением тогда и только тогда, когда оно является тонкой гомотопической эквивалентностью.*

40.2. Следствие. (1) *Любое CE-отображение между ANR-пространствами есть собственная гомотопическая эквивалентность.*

(2) *Любая конечная композиция CE-отображений между ANR-пространствами является CE-отображением.*

Доказательство. (1) Пусть f: $X \to Y$ — CE-отображение и $\mathscr{U}$ — открытое покрытие Y. Если g: $Y \to X$ — собственное отображение из определения тонкой гомотопической эквивалентности, то gf собственно гомотопно тождественному отображению. Поскольку $gf\,f^{-1}$ $(\mathscr{U})$-близко к тождественному отображению, fg $\mathscr{U}$-близко к тождественному отображению. Если $\mathscr{U}$ достаточно мелко, то fg должно быть собственно гомотопно тождественному отображению, поскольку Y есть ANR-пространство.

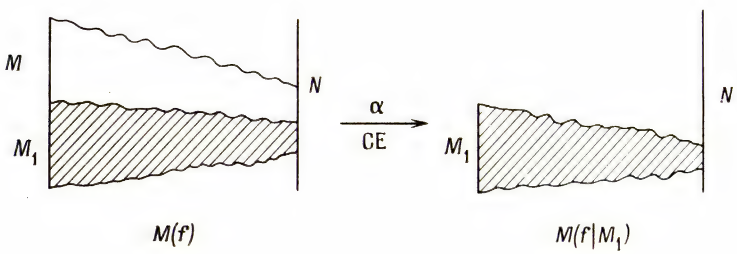
(2) Пусть f: $X \to Y$, g: $Y \to Z$ — CE-отображение, а $\mathscr{U}$ — открытое покрытие Z. Выберем собственные отображения g_1: $Z \to Y$ и f_1: $Y \to X$ так, что g_1g: $Y \to Y$ собственно гомотопно тождественному отображению посредством гомотопии, ограниченной покрытием $g^{-1}(\mathscr{U})$, а f_1f: $X \to X$ собственно гомотопно тождественному отображению посредством гомотопии, ограниченной покрытием $f^{-1}g^{-1}(\mathscr{U})$. Тогда f_1g_1: $Z \to X$ — собственное отображение, а композиция f_1g_1fg: $X \to X$ собственно гомотопна тождественному отображению сначала посредством гомотопии $g_1g \simeq \mathrm{id}$, а затем посредством $f_1f \simeq \mathrm{id}$. Эта собственная гомотопия ограничена, как легко видеть, двойной звездой покрытия $f^{-1}g^{-1}(\mathscr{U})$, т.е. покрытием, образованным множествами вида $St^2_{f^{-1}g^{-1}(\mathscr{U})}\, U$, $U \in f^{-1}g^{-1}(\mathscr{U})$. Но этого достаточно, чтобы gf: $X \to Z$ было тонкой гомотопической эквивалентностью и, значит, CE-отображением. ■

§ 41. Произведения ANR-пространств на $[0, 1)$. В 41.3 мы доказываем, что всякий ANR-компакт, умноженный на $[0, 1)$, является CE-образом Q-многообразия. В 41.1 и 42.2 мы устанавливаем две технические леммы, которые понадобятся при доказательстве теоремы 41.3.

Напомним понятие цилиндра отображения, введенное в § 31. Если f: $X \to Y$ — отображение между компактами X и Y, то цилиндр отображения $M(f)$ может рассматриваться как объединение $X \times [0, 1) \cup Y$, где X отождествляется с $X \times \{0\} \subset X \times [0, 1)$. *Сжатие на базу* есть отображение c: $M(f) \to Y$, определяемое равенствами $c(x, t) = f(x)$ для всех $(x, t) \in X \times [0, 1)$ и $c|_Y = \mathrm{id}$. Заметим, что прообразы точек стягиваемы. Значит, если X и Y — ANR-пространства, то таково же и $M(f)$, а c — всегда CE-отображение (доказательство того, что $M(f)$ должно быть ANR-пространством см. в [9, стр. 116]).

Подмножество M_1 Q-многообразия M называется *чистым*, если M_1 — компакт, граница которого $\mathrm{Bd}\,M_1$ является Q-многообразием, имеющим воротник и в M_1, и в $M \setminus \mathrm{Int}\,M_1$. Если U — окрестность компакта $C \subset U$, то всегда существует такое чистое M_1, что $C \subset M_1 \subset U$. Если M уже триангулировано, то для построения M_1 не надо привлекать триангуляционную теорему (см. первую часть доказательства теоремы 41.3).

41.1. Лемма о скольжении. *Пусть f: $M \to N$ — отображение между компактными Q-многообразиями и $M_1 \subset M$ — чистое множество. Если c: $M(f) \to N$ — сжатие на базу, то существует такая CE-ретракция α: $M(f) \to M(f|M_1)$, что $c\alpha$ близко к c.*



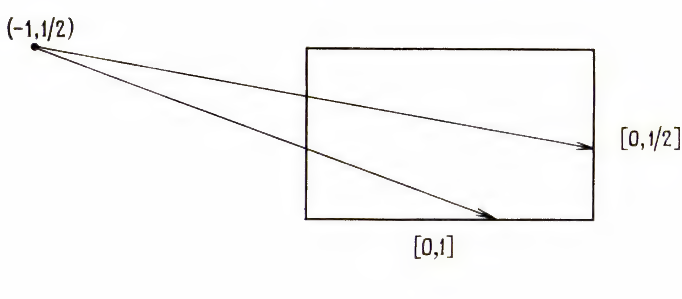
Доказательство. Мы построим такую CE-ретракцию

$$\beta\colon M \times [0, 1] \to M_1 \times [0, 1] \cup M \times \{1\},$$

что $\pi\beta$ близко к π, где π — проектирование на $M \times \{1\}$. Отождествляя затем $(x, 1)$ с fx для всех $x \in M$, легко получим желаемый результат.

Пусть φ: $\mathrm{Bd}\,M_1 \times [0, 1) \to M \setminus \mathrm{Int}\,M_1$ — такое открытое вложение, что $\varphi(m, 0) = m$ для всех $m \in \mathrm{Bd}\,M_1$. Проектируя из точки $(-1, 1/2)$, мы получаем CE-ретракцию

$$\theta\colon [0, 1] \times [0, 1/2] \to [0, 1] \times \{0\} \cup \{1\} \times [0, 1/2].$$



Определим отображение β, полагая
(1) $\beta=\pi$ на $(M\setminus M_1\cup\varphi(\mathrm{Bd}M_1\times[0,\ 1/2)))\times[0,1]$,
(2) $\beta=\mathrm{id}$ на $M_1\times[0,\ 1]$,
(3) $\beta(\varphi(m,\ s),\ t)=(\varphi(m,\ \theta_2(t,\ s)),\ \theta_1(t,\ s))$ на $\varphi(\mathrm{Bd}M_1\times[0,\ 1/2])\times[0,\ 1]$, где $\theta=(\theta_1,\ \theta_2)$.

Заметим, что β (и, значит, α) клеточно подобно, поскольку прообразы точек стягиваемы. ■

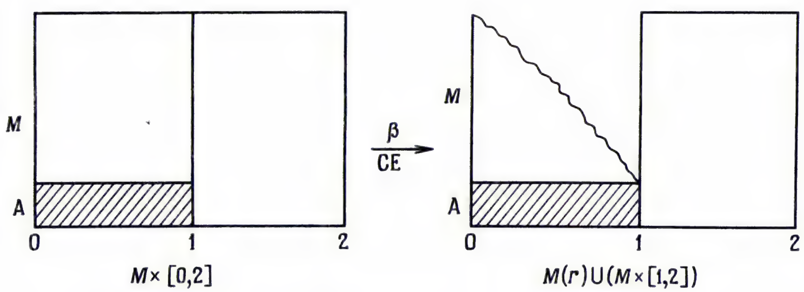
41.2. Лемма о расщеплении. *Пусть M — компактное Q-многообразие, r: $M\to A$ — ретракция, и пусть*

$$r_1\colon M\times[0,\ 2]\to A,$$
$$r_2\colon M(r)\cup(M\times[1,\ 2])\to A$$

— индуцированные ретракции. Тогда существует такое CE-отображение

$$\beta\colon M\times[0,\ 2]\to M(r)\cup M\times[1,\ 2],$$

что $\beta=\mathrm{id}$ на $A\times\{0\}\cup M\times\{2\}$ и $r_2\beta$ близко к r_1 (здесь $M(r)$ склеено с $M\times[1,\ 2]$ вдоль $M\{1\}$). См. рисунок.



Доказательство. Мы построим β как композицию

$$M\times[0,\ 2]\xrightarrow[\text{гомео}]{u} M\times[0,\ 2]\times Q\xrightarrow[\text{гомео}]{v} M[1,\ 2]\times Q\xrightarrow[\text{гомео}]{w}\times$$
$$\times\xrightarrow[CE]{\rho} M(r)\cup M\times[1,\ 2].$$

I. u^{-1}: $M\times[0,\ 2]\times Q\to M\times[0,\ 2]$ — такой близкий к проектированию, что $u^{-1}(m,\ 0,\ 0,)=(m,\ 0)$ и $u^{-1}(m,\ 2,\ 0)=(m,\ 2)$. Он строится на основе теорем 15.1 и 19.4.

II. Гомеоморфизм v определяется равенством

$$v(m,\ t,\ q)=(m,\ 1+1/2t,\ q).$$

III. Пусть φ: $M\to Q$ — такое отображение, что $\varphi(M\setminus A)\subset Q\setminus\{0\}$,

$\varphi(A)=\{0\}$ и $\varphi|_{(M\setminus A)}$ взаимно однозначно. Определим

$$X=M\times[0,\ 1]\underset{\theta}{\cup}M\times[1,\ 2]\times Q,$$

где θ отождествляет $(m,\ 1)\in M\times\{1\}$ с $(r(m),\ 1,\ \varphi(m))$ из $M\times[1,\ 2]\times Q$. Из теоремы 16.2 о воротнике вытекает, что X есть Q-многообразие, поскольку θ осуществляет Z-вложение $M\times\{1\}$ в $M\times[1,\ 2]\times Q$. Гомеоморфизм w^{-1}: $X\to M\times[1,\ 2]\times Q$ получается «втаскиванием» $M\times[0,\ 1]$ в $M\times[1,\ 2]\times Q$ по воротнику множества $\theta(M\times\{1\})$ в $M\times[1,\ 2]\times Q$. Он сосредоточен на небольшой окрестности множества $M\times[0,\ 1]\underset{\theta}{\cup}\theta(M\times\{1\})$ и удовлетворяет условиям $w^{-1}(m,\ 0)=(r(m),\ 1,\ \varphi(m))$ и $w^{-1}|M\times\{2\}\times Q=\mathrm{id}$.

IV. ρ: $X\to M(r)\cup M\times[1,\ 2]$ есть CE-отображение, получаемое сжатием сомножителя Q.

Читатель теперь легко проверит, что $\beta=\rho wvu$ удовлетворяет нашим требованиям. ■

41.3. Теорема. *Если A есть ANR-компакт, то $A\times[0,\ 1)$ является CE-образом Q-многообразия.*

Доказательство. Сначала построим компактное Q-многообразие M, содержащее A и удовлетворяющее условиям:

(1) существует ретракция r: $M\to A$,

(2) существуют такие чистые Q-многообразия $M_n\subset M$, что $M_{n+1}\subset\operatorname{Int}M_n$ и $\bigcap_{n=1}^{\infty}M_n=A$.

Рассмотрим A как подмножество Q и возьмем ретракцию r': $G\to A$ некоторой окрестности G множеств A. Достаточно построить чистое Q-многообразие $N\subset G$, которое является окрестностью множества A.

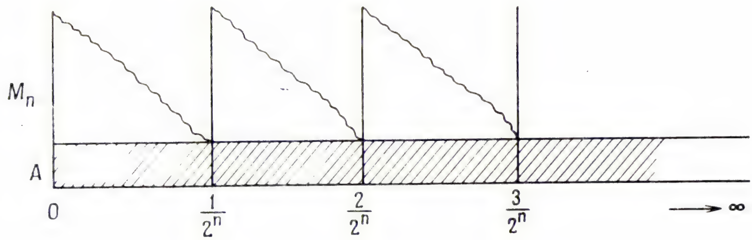
Так же как и в доказательстве теоремы 13.2 (см. также 31.1), мы можем найти целое n и открытое множество $U\subset I^n$, такие, что

$$A\subset\pi_n(A)\times Q_{n+1}\subset U\times Q_{n+1}\subset G,$$

где π_n: $Q\to I^n$ — проектирование. Поскольку π_nA — компакт, используя трубчатую окрестность, можно найти такое PL-подмногообразие с краем $R\subset I^n$, что $\pi_nA\subset\operatorname{Int}R\subset R\subset U$ и $\operatorname{Bd}R$ имеет двойной воротник в I^n. Тогда $N=R\times Q_{n+1}$ и будет Q-многообразием в G, содержащим A в своей внутренности.

Положим $M_0=M$ и для каждого $n\geqslant 0$ определим r_n: $M_n\to M_n$ как ограничение ретракции r на M_n.

Рассмотрим пространство X_n, приведенное на рисунке ниже.

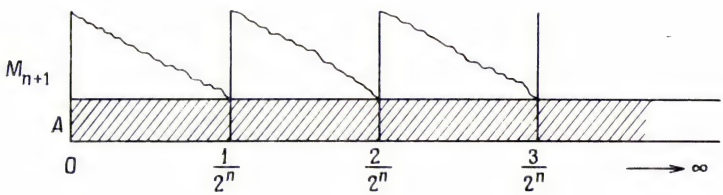


X_n — это в точности счетная сумма копий цилиндра отображения $M(r_n)$, склеенных вдоль M_n. Заметим, что $A \times [0, \infty) \subset X_n$ и существует (вертикальная) ретракция s_n: $X_n \to A \times [0, \infty)$, индуцированная r_n. Остаются два шага доказательства.

I. Существует *CE*-отображение из X_0 на $A \times [0, \infty)$.

II. X_0 есть *CE*-образ *Q*-многообразия. После этого нам остается только применить 40.2.

Чтобы доказать *I*, мы по аналогии с X_n определяем пространства Y_n.



Y_n — это в точности счетное число копий цилиндра отображения $M(r_{n+1})$, которые склеены вдоль M_{n+1}. В силу 41.1 (скольжение), существует *CE*-ретракция α_n: $X_n \to X_n$, а согласно 41.2 (расщепление), существует *CE*-отображение β_n: $Y_n \to X_{n+1}$, не сдвигающее точек слишком далеко. А именно, если выбор сделан правильно, то

$$f_n = \beta_n \alpha_n \colon X_n \to X_{n+1}$$

есть *CE*-отображение, для которого $d(s_{n+1} f_n, s_n) < \frac{2}{2^n}$. Мы докажем, что предел

$$f = \lim_{n \to \infty} f_n f_{n-1} \ldots f_2 f_1 f_0 \colon X_0 \to A \times [0, \infty]$$

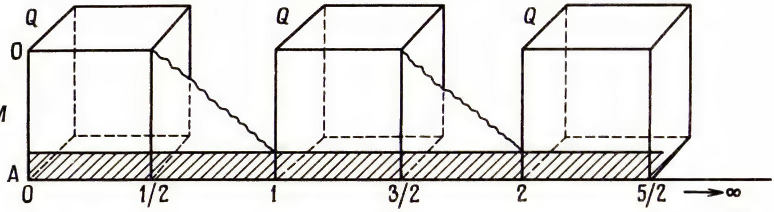
является *CE*-отображением.

Условие $d(s_{n+1}f_n, s_n)<\frac{2}{2^n}$ влечет, что $\{s_{n+1}f_n \ldots f_1f_0\}$ есть последовательность Коши, сходящаяся, следовательно, к некоторому отображению X_0 на $A\times[0, \infty)$, определение которого, как легко видеть, совпадает с определением отображения f. Значит, f определено и является собственным эпиморфизмом. Чтобы показать, что f есть CE-отображение, возьмем точку $x\in A\times[0, \infty)$ и окрестность $U\subset A\times[0, \infty)$ этой точки. Для любого n определим

$$f^n=\lim_{m\to\infty}f_mf_{m-1}\ \ldots\ f_n\colon X_n\to A\times[0, \infty).$$

Достаточно найти большое n и окрестность $V\subset(f^n)^{-1}U$ множества $(f^n)^{-1}x$, такие, что включение $V\hookrightarrow(f^n)^{-1}U$ гомотопно постоянному отображению (после того, как это сделано, можно применить теорему 40.1, чтобы показать, что $(f_{n-1}\ \ldots\ f_0)^{-1}V$ есть окрестность множества $f^{-1}x$, гомотопная точке в $f^{-1}U$). Если n велико и окрестность $V\subset X_n$ близка к $(f^n)^{-1}x$, то ее можно сдвинуть в $A\times[0, \infty)$ гомотопией в $(f^n)^{-1}U$, перемещающей точки не более чем на один уровень вдоль нашей конструкции из цилиндров отображений. Поскольку $A\times[0, \infty)$ локально стягиваемо в каждой точке, то в $(f^n)^{-1}U$ существует гомотопия образа множества V к точке x.

Чтобы доказать II, возьмем такое отображение $\varphi\colon M\to Q$, что $\varphi A=\{0\}$, $\varphi(M\setminus A)\subset Q\setminus\{0\}$ и $\varphi|_{M\setminus A}$ взаимно однозначно. Теперь определим вложение $e\colon M\to M\times Q$ равенством $e(m)=(r(m), \varphi(m))$. Пусть N — пространство, нарисованное ниже.



Оно образовано склеиванием экземпляров пространства $M\times\times[0, 1]\times Q$ и цилиндра отображения $M(e)$. Например, первый цилиндр $M(e)$ склеен с $M\times[0, 1/2]\times Q$ вдоль $M\times\{1/2\}\times\{0\}$ (в $M\times[0, 1/2]\times Q$) и склеен с $M\times[1, 3/2]\times Q$ вдоль $M\times\{1\}\times Q$. Заштрихованная область — это $A\times[0, \infty)$.

Если спроектируем Q-сомножитель на плоскость рисунка, то мы, очевидно, получим CE-отображение N на X_0. Легко видеть также, что N есть Q-многообразие (в силу теоремы 16.2 о воротнике). ■

Замечания

§ 40. Характеризация *CE*-отображений (теорема 40.1) дана также Торунчиком [47] и в неявной форме Козловским [35]. Конечномерный случай рассмотрен Ляшером [36].

§ 41. Основной результат (теорема 41.3) обязан своим появлением Миллеру [37], который доказал, что всякое конечномерное *ANR*-пространство, умноженное на [0, 1), является *CE*-образом конечномерного многообразия. Это же доказательство работает и в случае *Q*-многообразий. Доказательство, данное в 41.3, появилось в результате разговора автора с Джимом Вестом весной 1974 г. В [52] Вест использовал теорему 41.3 для доказательства того, что всякий *ANR*-компакт является *CE*-образом компактного *Q*-многообразия. Отсюда с помощью триангуляционной теоремы получается, что каждый *ANR*-компакт имеет конечный гомотопический тип. Это дает решение долго стоявшей гипотезе о конечности гомотопических типов *ANR*-компактов.

XIV. ANR-ТЕОРЕМА

Основная цель этой главы — доказать ANR-теорему 44.1, которая утверждает, что любое локально компактное ANR-пространство, умноженное на Q, является Q-многообразием. В процессе этого мы также доказываем CE-аппроксимационную теорему 43.2, которая утверждает, что любое CE-отображение между Q-многообразиями является почти гомеоморфизмом. Клю- чевой шаг в доказательстве ANR-теоремы дается в 43.1. В 41.2 и 42.2 мы устанавливаем две леммы, необходимые в 43.1.

§ 42. Два результата о почти гомеоморфизмах. В 42.1 мы применяем 26.1 (сжимающий критерий Бинга), чтобы установить бесконечномерный сжимающий критерий, который действует в произвольных локально компактных пространствах. В 42.2 мы устанавливаем другой сжимающий критерий, который действует в более специальных условиях. Оба результата формулируются в терминах почти гомеоморфизмов.

42.1. Лемма. *Пусть p: $X \to Y$ — такой собственный эпиморфизм локально компактных пространств, что для каждого открытого покрытия $\mathscr{V}$ пространства $Y \times Q \times [0, 1]$ существует почти гомеоморфизм α пространства $X \times Q \times [0, 1]$ на себя, для которого*

(1) $(p \times \mathrm{id})\alpha$ *$\mathscr{V}$-близко к* $p \times \mathrm{id}$,

(2) $\alpha(p \times \mathrm{id})^{-1}(y, q, 1) = \{$*точка*$\}$ *для всех* $y \in Y$ *и* $q \in Q$,

(3) $\alpha(X \times Q \times [0, 1)) \subset X \times Q \times [0, 1]$.

Тогда $p \times \mathrm{id}_Q$: $X \times Q \to Y \times Q$ *есть почти гомеоморфизм.*

Доказательство. Для удобства разберем сначала компактный случай. Для каждого $\varepsilon > 0$ мы построим такой сжимающий почти гомеоморфизм β: $X \times Q \to X \times Q$, что

$$d((p \times \mathrm{id})\beta,\ p \times \mathrm{id}) < \varepsilon,$$

$$\operatorname{diam}\beta(p \times \mathrm{id})^{-1}(y, q) < \varepsilon \quad \text{для всех } y \text{ и } q.$$

Если гомеоморфизм h выбран близким к β, то h будет сжимающим гомеоморфизмом для $p \times \mathrm{id}$, удовлетворяющим требованиям из 26.1. Сжимающий почти гомеоморфизм будет построен как композиция

$$\beta = \alpha_1 s \alpha_2,$$

где α_1 и α_2—частичные сжимающие почти гомеоморфизмы, каждый из которых сжимает лишь часть прообразов точек при $p \times \mathrm{id}$, а s—скользящий гомеоморфизм, сдвигающий прообразы точек при $p \times \mathrm{id}$, которые не сжаты отображением α_2 в то положение, в котором они будут сжаты отображением α_1.

Заменим Q на $Q' \times [0, 1]$, где Q'—копия Q, и обозначим через

$$\pi\colon\ Y \times Q' \times [0, 1] \to Y \times Q'$$

проектирование. Для каждого $\varepsilon > 0$ мы построим β так, что

$$d(\pi(p \times \mathrm{id})\beta,\ \pi(p \times \mathrm{id})) < \varepsilon,$$

$$\operatorname{diam} \beta (p \times \mathrm{id})^{-1}(y,\ q,\ t) < \varepsilon \quad \text{для всех } y,\ q \text{ и } t.$$

Безусловно, благодаря этому наши требования будут удовлетворены, поскольку, выбирая n большим, мы можем отождествить Q' с $I^{n-1} \times Q_{n+1}$ и $[0, 1]$ с I_n. Поэтому движение в $[0, 1]$-направлении будет небольшим.

I. Построение α_1. В качестве α_1 берем существующий по условию почти гомеоморфизм пространства $X \times Q' \times [0, 1]$ на себя, такой, что

$$d((p \times \mathrm{id})\alpha_1,\ p \times \mathrm{id}) < \varepsilon/2,$$

$\alpha_1(p \times \mathrm{id})^{-1}(y,\ q,\ 1) = \{\text{точка}\}$ для всех y и q (здесь мы не нуждаемся в условии $\alpha_1(X \times Q' \times [0, 1)) \subset X \times Q' \times [0, 1)$).

II. Построение α_2. В силу компактности X можно выбрать $\delta_1 < \varepsilon/2$ так, что если A—любое подмножество $X \times Q' \times [0,1]$, лежащее в δ_1-окрестности некоторого прообраза $(p \times \mathrm{id})^{-1}(y,\ q,\ 1)$, то $\alpha_1(A)$ имеет диаметр $< \varepsilon$. Теперь в качестве $\alpha_2\colon X \times Q' \times [0, 1] \to X \times Q' \times [0, 1]$ берем такой почти гомеоморфизм, что

$$d((p \times \mathrm{id})\alpha_2,\ p \times \mathrm{id}) < \delta_1,$$

$\alpha_2(p \times \mathrm{id})^{-1}(y,\ q,\ 0) = \{\text{точка}\}$ для всех y и q, $\alpha_2(X \times Q \times (0, 1]) \subset X \times Q \times (0, 1]$ (мы поменяли местами 0 и 1).

III. Построение s. Пусть $\delta_2 > 0$ выбрано так, что $\alpha_1(A)$ имеет диаметр $< \varepsilon$ для любого множества $A \subset X \times Q' \times [0, 1]$ диаметра $< \delta_2$. Мы хотим построить гомеоморфизм $s\colon\ X \times Q' \times [0, 1] \to X \times Q' \times [0,1]$, который изменяет только $[0,1]$-координату

точек, так, что

(а) $\operatorname{diam}\alpha_2(p\times\mathrm{id})^{-1}(y,\ q,\ t)\geqslant\delta_2\Rightarrow s\alpha_2(p\times\mathrm{id})^{-1}(y,\ q,\ t)$

лежит в δ_1-окрестности множества $(p\times\mathrm{id})^{-1}(y,\ q,\ 1)$.

(б) $\operatorname{diam}\alpha_2(p\times\mathrm{id})^{-1}(y,\ q,\ t)<\delta_2\Rightarrow\operatorname{diam}s\alpha_2(p\times\mathrm{id})^{-1}(y,\ q,\ t)<\delta_2$.

Предположив на момент, что такой гомеоморфизм s построен, легко проверить, что $\beta=\alpha_1 s\alpha_2$ удовлетворяет нашим требованиям.

Теперь опишем, как строится s. Выберем разбиение отрезка $[0,\ 1]$:

$$0=t_0<t_1<\ldots<t_{n-1}<t_n=1,$$

$$0=u_0<u_1<\ldots<u_{n-1}<u_n=1.$$

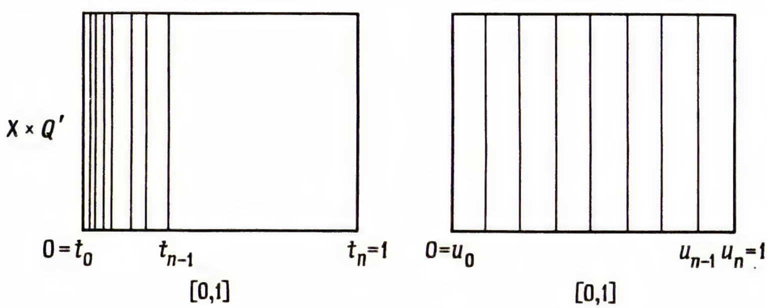
Пусть $s'\colon\ [0,\ 1]\to[0,\ 1]$ — произвольный гомеоморфизм, переводящий каждый отрезок $[t_i,\ t_{i+1}]$ в $[u_i,\ u_{i+1}]$. Теперь полагаем

$$s=\mathrm{id}_X\times\mathrm{id}_{Q'}\times s'.$$

Все, что нам остается сделать — это уточнить выбор t_i и u_i. Надо выбрать t_i так, что

(1) $\alpha_2(p\times\mathrm{id})^{-1}(y,\ q,\ t)\cap(X\times Q'\times[0,\ t_{n-1}])\neq\varnothing\Rightarrow$ $\Rightarrow\operatorname{diam}\alpha_2(p\times\mathrm{id})^{-1}(y,\ q,\ t)<\delta_2$,

(2) каждое $\alpha_2(p\times\mathrm{id})^{-1}(y,\ q,\ t)$ лежит в некотором $X\times Q'\times[t_{i-1},\ t_{i+1}]$. Для того чтобы это сделать, нам надо просто заметить, что любое $\alpha_2(p\times\mathrm{id})^{-1}(y,\ q,\ t)$, пересекающееся с $X\times Q'\times\{0\}$, имеет диаметр 0. Тогда при t_{n-1}, достаточно близком к 0, условие (1) выполнено автоматически. В силу этого же замечания можно t_{n-i}, $2\leqslant i\leqslant n-1$, последовательно выбрать так, чтобы было выполнено условие (2). Точки u_i выбирается равномерно: $u_i=i/n$. См. рисунок.



Если n велико, то условие (а) для гомеоморфизма s, разумеется, выполнено, поскольку u_{n-1} достаточно близко к 1. При

большом n выполнено и условие (б). Этим завершается доказательство в компактном случае.

Мы должны внести некоторые изменения в данное доказательство, чтобы оно прошло в некомпактном случае. Основная проблема состоит в том, что в представлении

$$X \times Q = X \times (I^{n-1} \times Q_{n+1}) \times I_n \equiv X \times Q' \times [0,\ 1]$$

I_n— сомножитель не может быть сделан «коротким» по отношению к любому наперед заданному открытому покрытию некомпактного пространства $X \times Q$. В частности, $(p \times \mathrm{id})\beta$ не может быть выбрано настолько близким к $p \times \mathrm{id}$, насколько мы желаем. Сейчас мы опишем альтернативную процедуру.

Выберем целое n_1 и компакт $Y_1 \subset Y$. По представлению

$$X \times Q = X \times (I^{n_1-1} \times Q_{n_1+1}) \times I_{n_1} \equiv X \times Q' \times [0,\ 1]$$

мы уже выше построили почти гомеоморфизм $\beta = \alpha_1 s \alpha_2$. Превращая скользящий гомеоморфизм s в тождественный на бесконечности, мы можем определить новый скользящий гомеоморфизм s_1: $X \times Q \to X \times Q$ так, что

(1) $s_1 = s$ на $p^{-1}(Y_1) \times Q$,

(2) s_1 сосредоточен на компактной окрестности множества $p^{-1}(Y_1) \times Q$. Это дает нам почти гомеоморфизм $\beta_1 = \alpha_1 s_1 \alpha_2$: $X \times Q \to X \times Q$. Выбирая n_1 большим, мы можем сделать $(p \times \mathrm{id})\beta_1$ сколь угодно близким к $p \times \mathrm{id}$. Ясно также, что β_1 есть сжимающий почти гомеоморфизм для множеств $(p \times \mathrm{id})^{-1}(y,\ q)$ при $y \in Y_1$ и всех q.

Теперь запишем $Y = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} Y_i$, где Y_i компактно и $Y_i \subset \mathrm{Int}_{i+1}$. Для каждого i выбираем достаточно большое n_i и, как выше, строим сжимающий гомеоморфизм $\beta_i = \alpha_1 s_i \alpha_2$ для множеств $(p \times \mathrm{id})^{-1}(y,\ q)$ при $y \in Y_1$ и всех q(α_1 и α_2 могут изменяться в зависимости от i). Не сложно сделать надлежащий выбор так, что

$$\beta' = \lim_{i \to \infty} \beta_1 \beta_2 \beta_3 \ \ldots\ \beta_i$$

определяет сжимающий почти гомеоморфизм для $p \times \mathrm{id}$ (заметим, что это бесконечная правая композиция). ■

42.2. Лемма. *Пусть M— Q-многообразие, X— ANR-пространство и f: $M \to Y$ CE-отображение. Если $\mathscr{D}$ — полунепрерывное сверху разбиение пространства $M \times [0,\ 1]$, невырожденными элементами которого является только множества $(f \times \mathrm{id})^{-1}(x,\ 1)$ при всех $x \in X$, то естественная проекция*

$$p\colon M \times [0,\ 1] \to Y = M \times [0,1]/\mathscr{D}$$

есть почти гомеоморфизм.

Доказательство. Мы снова будем использовать сжимающий критерий 26.1. Для любого открытого покрытия $\mathscr{W}$ пространства X мы в силу теоремы 40.1 (которая утверждает, что f есть тонкая гомотопическая эквивалентность) находим собственное отображение $g: X \to M$ и собственную гомотопию $F: M \times I \to M$ так, что $F_0 = \mathrm{id}$, $F_1 = gf$ и F ограничена покрытием $f^{-1}(\mathscr{W})$. По теореме 18.2 можно найти такую сколь угодно близкую к F собственную гомотопию $G: M \times I \to M$, что $G_0 = \mathrm{id}$ и G_1 есть Z-вложение (при этом мы используем тот факт, что «близкие» собственные отображения в ANR-пространство собственно гомотопны). Отождествляя M с $M \times \{1\} \subset M \times [0, 1]$, мы можем применить теорему 19.4 для получения гомеоморфизма

$$h: M \times [0, 1] \to M \times [0, 1],$$

который продолжает G_1.

Мы утверждаем, что h есть сжимающий гомеоморфизм для p. Чтобы проверить это, заметим сначала, что, выбирая G_1 достаточно близким к gf, диаметры множеств $h(f \times \mathrm{id})^{-1}(x, 1)$ можно сделать сколь угодно малыми. Следовательно, все множества $hp^{-1}y$ имеют малые диаметры. Теорема 19.4, примененная в полной мере, влечет, что h может быть выбрано сосредоточенным на любой окрестности множества $M \times \{1\}$ и ограниченным любым открытым покрытием

$$f^{-1}(\mathscr{W}) \times [0, 1] = \{f^{-1}(W) \times [0, 1] \mid W \in \mathscr{W}\}$$

множества $M \times [0, 1]$. Отсюда вытекает, что ph может быть выбрано как угодно близким к p. ■

§ 43. Основной шаг. В 43.1 мы, комбинируя 42.1 и 42.2, делаем основной шаг в доказательстве ANR-теоремы. Как непосредственное следствие получаем CE-аппроксимационную теорему.

43.1. Теорема. *Если M — Q-многообразие, X — ANR-пространство и $f: M \to X$ — CE-отображение, то*

$$f \times \mathrm{id}: M \times Q \to X \times Q$$

есть почти гомеоморфизм.

Доказательство. Покажем, что условия из 42.1 выполнены. На время ограничимся компактным случаем. Представим Q как произведение двух своих экземпляров

$$Q = Q_1 \times Q_2$$

и возьмем вложение θ: $M\times Q_1\to Q_2$. Обозначим через

$$(M\times Q_1)'=\{(m,\ q_1,\ \theta(m,\ q_1))\mid (m,\ q_1)\in M\times Q_1\}\subset M\times Q_1\times Q_2$$

копию $M\times Q_1$ и определим

$$\beta\colon M\times Q_1\times Q_2\to (M\times Q_1)',$$

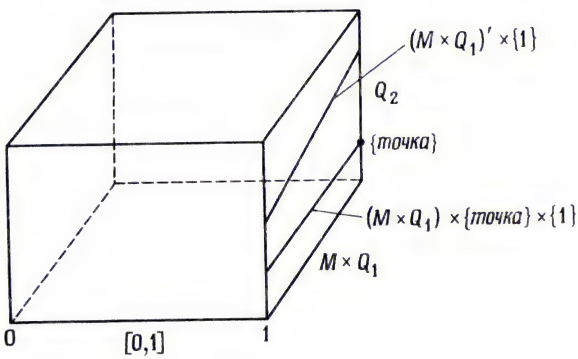
полагая $\beta(m,\ q_1,\ q_2)=(m,\ q_1,\ \theta(m,\ q_1))$. Отображение β представляется в виде композиции

$$\beta=\beta_1\pi\colon M\times Q_1\times Q_2\xrightarrow{\pi} M\times Q_1\xrightarrow{\beta_1}(M\times Q_1)',$$

где $\beta_1(m,\ q_1)=(m,\ q_1,\ \theta(m,\ q_1))$. По теореме 15.1 отображение β является почти гомеоморфизмом. Пусть g: $M\times Q\to(M\times\times Q_1)'$ — любой гомеоморфизм, близкий к β. Заметим, что, выбирая представление $Q=Q_1\times Q_2$ так, чтобы Q_2 было «коротким», мы можем сделать g сколь угодно близким к id. Тогда g индуцирует «малый» гомеоморфизм

$$g'\colon M\times Q\times\{1\}\to(M\times Q_1)'\times\{1\}$$

между подмножествами из $M\times Q\times[0,\ 1]$. См. рисунок.



Заметим, что $(M\times Q_1)'\times\{1\}$ выглядит как «наклоненный» экземпляр множества $(M\times Q_1)\times\{\text{точка}\}\times\{1\}$. Так оно и есть, поскольку это график.

Рассмотрим пространство разбиения

$$Y=M\times Q\times[0,\ 1]/\mathscr{D},$$

где $\mathscr{D}$ — полунепрерывное сверху разбиение пространства $M\times Q\times[0,\ 1]$, невырожденными элементами которого являются только множества $(f\times\mathrm{id})^{-1}(x,\ q,\ 1)$ для всех x и q. Естественное проектирование

$$p\colon M\times Q\times[0,\ 1]\to Y$$

есть почти гомеоморфизм согласно 42.2. Поскольку $M\times Q\times\{1\}$ есть Z-множество в $M\times Q\times[0,\ 1]$, а p — почти гомеоморфизм, легко получить, что $p(M\times Q\times\{1\})$ есть Z-множество в Y. Таким образом, $p((M\times Q_1)'\times\{1\})$ есть Z-множество в Y. В то же время $p|_{(M\times Q_1)'\times\{1\}}$ важно однозначно. Поэтому

$$p|_{(M\times Q_1)'\times\{1\}}$$

есть Z-вложение.

Значит, по теореме 19.4 мы можем выбрать гомеоморфизм u: $M\times Q\times[0,\ 1]\to Y$, близкий к p и совпадающий с p на $(M\times Q_1)'\times\{1\}$. Пусть $\tilde{g}$: $M\times Q\times[0,\ 1]\to M\times Q\times[0,\ 1]$ — гомеоморфизм, продолжающий g' и близкий к id. Тогда $\varphi=(\tilde{g})^{-1}u^{-1}p$ есть почти гомеоморфизм пространства $M\times Q\times[0,\ 1]$ на себя, удовлетворяющий требованиям из 42.1. Этим завершается доказательство в компактном случае.

Чтобы приспособить это доказательство для некомпактного случая, надо показать, как построить вложение g: $M\times Q\to M\times Q$, чтобы

(1) g было близким к id.

(2) $g(M\times Q)$ пересекалось с каждым $M\times\{q\}$ не более чем в одной точке.

Будучи построенным, g индуцирует малое вложение

$$g'\colon M\times Q\times\{1\}\to M\times Q\times\{1\},$$

и $\tilde{g}$, p и u строятся, как и выше.

Чтобы построить g, мы нуждаемся прежде всего во взаимно однозначном отображении φ: $M\times Q\to Q$, близком к проектированию π: $M\times Q\to Q$. Запишем $M=\bigcup_{n=1}^{\infty}M_n$, где M_n суть компактны и $M_n\subset \operatorname{Int} M_{n+1}$. Последовательно применяя теорему 11.2, мы можем выбрать Z-вложения φ_n: $M_n\times Q\to Q$ так, что $\varphi_{n+1}=\varphi_n$ на $M_n\times Q$ и φ_n достаточно близко к проектированию $M_n\times Q\to Q$. Определим φ: $M\times Q\to Q$, полагая $\varphi|_{M_n\times Q}=\varphi_n$. Ясно, что φ взаимно однозначно и непрерывно. Теперь определяем требуемое вложение g: $M\times Q\to M\times Q$:

$$g(m,\ q)=(m,\ \varphi(m,\ q)).$$

Отображение g непрерывно и взаимно однозначно. Если φ близко к π: $M\times Q\to Q$, то g близко к id и, значит, является собственным. Но любое взаимно однозначное собственное отображение является вложением. Ясно также, что каждое $g(M\times Q)\cap(M\times\{q\})$ содержит не более одной точки. ■

43.2. Следствие. *Если f: $M \to N$ — CE-отображение между Q-многообразиями, то f — почти гомеоморфизм.*

Доказательство. Рассмотрим следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} M \times Q & \xrightarrow{f \times \mathrm{id}} & N \times Q \\ \text{проекция} \downarrow & & \downarrow \text{проекция} \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

Вертикальные стрелки здесь обозначают проектирования, являющиеся почти гомеоморфизмами согласно 15.1. По теореме 43.1 отображение $f \times \mathrm{id}$ является почти гомеоморфизмом. Тогда и f— почти гомеоморфизм. ■

§ 44. Основной результат. Теперь мы соединим вместе 41.3 и 43.1 для доказательства основного результата.

44.1. Теорема. *Если X — ANR-пространство, то $X \times Q$ — Q-многообразие.*

Доказательство. Пусть X' — одноточечная компактификация пространства $X \times [0, 1)$. Как доказал Химэн [32], X' является AR-пространством (читатель может дать и свое собственное доказательство). Применяя 41.3, мы видим, что $X' \times [0, 1)$ есть CE-образ Q-многообразия. Тогда 43.1 влечет, что $X' \times [0, 1) \times Q$ есть Q-многообразие и, значит,

$$X' \times [0, 1] \times Q \cong X' \times Q$$

также является Q-многообразием.

Поскольку X' содержит $X \times [0, 1)$ в качестве открытого множества, $X \times [0, 1) \times Q$ есть Q-многообразие. Значит, и $X \times \times [0, 1] \times Q$ является Q-многообразием. ■

44.2. Следствие. *Всякий ANR-компакт имеет гомотопический тип компактного полиэдра.*

Доказательство. Применяя теорему 44.1 наряду с триангуляционной теоремой 36.2. ■

Замечания

§ 42. Специальный сжимающий критерий, данный в 42.1 (и его доказательство), принадлежит Эдвардсу [25]. Сжимающий

критерий, данный в 42.2, принадлежит Весту [52], хотя здесь приведено доказательство Эдвардса.

§ 43. Теорема 43.1 о почти гомеоморфизме (и ее доказательство) принадлежит Эдвардсу [25].

В том случае, когда X — Q-многообразие, результат впервые был получен Чепмэном [19] с применением техники Зибенмана [43].

§ 44. Основной результат 44.1 принадлежит Эдвардсу [25]. Он решает долго стоявшую гипотезу о структуре Q-многообразий. Мы уже упоминали в главе XIII, что 44.2 принадлежит Весту [52], применившему другую технику.

ЛИТЕРАТУРА

Anderson R. D.

1. Topological properties of the Hilbert cube and the infinite product of open intervals. Transactions A.M.S. 126 (1967), 200–216.
2. On topological infinite deficiency. Mich. Math. J. 14 (1967), 365–383.

Anderson R. D., Schori R.

3. Factors of infinite-dimensional manifolds. Transactions A.M.S. 142 (1969), 315–330.

Anderson R. D., McCharen J.

4. On extending homeomorphisms to Frechet manifolds. Proceedings A.M.S. 25 (1970), 283–289.

Anderson R. D., Chapman T. A.

5. Extending homeomorphisms to Hilbert cube manifolds. Pacific J. of Math. 38 (1971), 281–293.

Bar W.

6. Small extensions of small homeomorphisms. Notices A.M.S. 16 (1969), 295.

Bing R. H.

7. The cartesian product of a certain nonmanifold and a line is E^4. Ann. of Math. 70 (1959), 399–412.

Borsuk K.

8. Concerning homotopy properties of compacta. Fund. Math. 62 (1968), 223–254.
9. Theory of retracts. Polish Scientific Publishers, Warsaw, 1967. [Русский перевод: Борсук К. Теория ретрактов. Пер.с англ. — М.: Мир, 1971.]

Chapman T. A.

10. Dense sigma-compact subsets of infinite-dimensional manifolds. Trans. A.M.S. 154 (1971), 399–426.
11. On the structure of Hilbert cube manifolds. Compositio Math. 24 (1972), 329–353.
12. On some applications of infinite-dimensional manifolds to the theory of shape. Fund. Math. 76 (1972), 181–193.
13. Shapes of finite-dimensional compacta. Fund. Math. 76 (1972), 261–276.
14. Surgery and handle straightening in Hilbert cube manifolds. Pacific J. of Math. 45 (1973), 59–79.
15. Compact Hilbert cube manifolds and the invariance of Whitehead torsion. Bull. A.M.S. 79 (1973), 52–56.
16. Topological invariance of Whitehead torsion. American J. of Math. 96 (1974), 488–497.
17. All Hilbert cube manifolds are triangulable, preprint.
18. Non-compact Hilbert cube manifolds and infinite simple homotopy types, preprint.
19. Cell-like mappings of Hilbert cube manifolds: Solution of a handle problem. General Top. and its App. 5 (1975), 123–145.

Chapman T. A., Ferry S.

20. Obstruction to finiteness in the proper category, preprint.

Cohen M.

21. Simplicial structures and transverse cellularity. Ann. of Math. 85 (1967) 218–245.
22. A course in simple-homotopy theory. Springer-Verlag, New York, 1970.

Connelly R.

23. A new proof of Brown's collaring theorem. Proc. A.M.S. 27 (1971) 180–182.

Dugundji J.

24. Topology. Allyn and Bacon, Boston, 1966.

Edwards R. D.

25. Characterising infinite dimensional manifolds topologically (after Henryk Toruńczyk). Seminaire Bourbaki. № 540, 1978/79, 278–302.

Ferry S.

26. An immersion T^n—D^n into R^n. L'Enseignement Math. 20 (1974), 12–13.

Handel M.

27. On certain sums of Hilbert cubes. General Topol. Appl. 1978, 9, №, 1. 19–28.

Haver W.

28. Mappings between ANRs that are fine homotopy equivalences. Pacific J. of Math. 58 (1975), 457–461.

Henderson D. W.

29. Open subsets of Hilbert space. Compositio Math. 21 (1969), 312–318.
30. Infinite-dimensional manifolds are open subsets of Hilbert space. Topology 9 (1970), 25–34.

Hudson J. F. P.

31. Piecewise linear topology. Benjamin, New York, 1969.

Hyman D. M.

32. ANR divisors and absolute neighborhood contractibility. Fund. Math. 62 (1968), 61–73.

Kirby R. C.

33. Lectures on triangulation of manifolds, U.C.L.A. Lecture Notes, Los Angeles, 1969.

Kirby R. C., Siebenmann L. C.

34. On the triangulation of manifolds and the Hauptvermutung. Buli. A.M.S. 75 (1969), 742–749.

Kozlowski G.

35. Images of ANRs. Trans. A.M.S., to appear.

Lacher R. C.

36. Cell-like mappings I. Pacific J. of Math. 30 (1969), 717–731.

Miller R. J.

37. Mapping cylinder neighborhoods of some ANRs, Bull. A.M.S. 81 (1975), 187–188.

Milnor J. W.

38. On spaces having the homotopy type a CW complex. Trans. A.M.S. 90 (1959), 272–280.

Rushing T. B.

39. Topological embeddings. Academic Press, New York, 1973.

Sher R. B.

40. The union of two Hilbert cubes meeting in a Hilbert cube need not be a Hilbert cube. Proc. A.M.S., 1977, 63, № 1, 150–152.

Siebenmann L. C.

41. The obstruction to finding a boundary tor an open manifold of dimension greater than five. Thesis, Princeton University, 1965.
42. Infinite simple homotopy types. Indag. Math. 32 (1970), 479–495.
43. Approximating cellular maps by gomeomorphisms. Topology 11 (1972), 271–294.
44. L'Invariance topologique du type simple d'homotopie. Seminaire Bourbaki, 25^e anee, 1972/73, n° 428.

45. Chapman's classification of shapes: A proof using collapsings. Manuscripta Math. 16 (1975), 373–384.

Spanier E. H.

46. Algebraic topology, McGraw-Hill, New York, 1966. [Русский перевод: Спеньер Э. Алгебраическая топология. Пер.с англ.—М.: Мир, 1971.]

Toruńczyk H.

47. Concerning locally homotopy negligible sets and characterization of l_2-manifolds. Fund. Math., 1978, 101, № 2, 93–110.

Venema G.

48. Embeddings of compacta with shape dimension in the trivial range. Proc. A.M.S. 1976, 55, № 2, 443–448.

Wall C. T. C.

49. Finiteness conditions for CW complexes. Annals of Math. 81 (1965), 55–69.

West J. E.

50. Infinite products which are Hilbert cubes, Trans. A.M.S. 150 (1970), 1–25.

51. Mapping cylinders of Hilbert cube factors, General Top. and its App. 1 (1971), 111–125.

52. Mapping Hilbert cube manifolds to ANRs. A slolution of a conjecture of Borsuk. Ann. Math. Ser. 2, 1977, 106; № 1, 1–18.

Whitehead J. H. C.

53. Simple homotopy types. Amer. J. of Math. 72 (1950), 1–57.

54. Combinatorical homotopy I. Bull. A.M.S. 55 (1949), 213–245.

Wong R. Y. T.

55. On homeomorphisms of certain infinite-dimensional spaces. Trans. A.M.S. 128 (1967), 148–154.

56. Extending homeomorphisms by means of collarings. Proc. A.M.S. 19 (1968), 1443–1447.

Geoghegan R.

57*. Open problems in infinite-dimensional topology. Topology proceedings, 4 (1979), 287–338.

Toruńczyk H.

58*. On CE-images of the Hilbert cube and characterization of Q-manifolds. Fund. Math., 106, № 1, 1980, 31–40.

Toruńczyk H., West J. E.

59*. Fibrations vs. Bundles in Hilbert cube manifolds. Preprint.

West J. E.

60*. Sums of Hilbert cube factors. Pacif. Journ. Math., 54, № 1, 1974, 293–303.

Walsh J. J.

61*. Infinite dimensional compacta containing no n-dimensional ($n \geqslant 1$) subsets. Topology, 18 (1979), 91–95.

---

* Звездочкой отмечена литература, добавленная при переводе.

ДОБАВЛЕНИЕ

ОТКРЫТЫЕ ПРОБЛЕМЫ В БЕСКОНЕЧНОМЕРНОЙ ТОПОЛОГИИ.

СПИСОК ПРОБЛЕМ ПО ОБЛАСТЯМ

I. *Введение*

Этот список проблем является, так сказать, наследником более ранних списков, составленных на следующих конференциях: Итака (январь 1969), Батон Руж (декабрь 1969), Оберволфах (сентябрь 1970) и Батон Руж (октябрь 1973). Данный список подготовлен на специальной конференции в Афи, Джорджия (август 1975) и региональной конференции Си-Би-Эм-Эс в Гринсборо (октябрь 1975). Предыдущие списки были опубликованы как доклад Математического центра (ZW 1/71) и как часть трактата Математического центра № 52, 1974, стр. 141—175, Амстердам.

Настоящий список не содержит, разумеется, всех нерешенных вопросов, известных участникам конференции, но он включает в себя наиболее важные проблемы из основных областей, исследуемых в настоящее время в теоретико-множественной топологии бесконечномерных пространств и многообразий, известных авторам. Из-за ограниченности места пришлось опустить некоторые включенные в предыдущие списки темы, такие, как равномерно непрерывные и липшицевские гомеоморфизмы, ко-

торые в последнее время активно исследовались Агарони, Энфло, Манкевичем, не принявшими участия в конференции. Данный список проблем составлен Р. Андерсоном, Д. Кёртисом, Г. Козловским и Р. Шори с помощью многих других участников. Были предприняты усилия привести прошлые списки к современному виду и выделить новые, отличные от прежних, области исследований.

Мы признаем, что некоторые проблемы из этого списка, возможно, неточно сформулированы, тривиальны или уже решены. Из-за многообразия взаимосвязей некоторые аспекты различных проблем появляются в нескольких главах.

Следующие математики приняли участие в проблемной сессии и поставили много проблем: Р. Андерсон, Т. Чепмэн, Д. Кёртис, Р. Гэган, Г. Козловский, Р. Шори и Дж. Вест; следующие участники конференции также сформулировали некоторые проблемы: Д. Эдвардс, Р. Эдвардс, М. Хэндел, Х. Хастингс, В. Хэйвер, Р. Хайзи, Д. Кислинг, Д. Квинн, Р. Шер, В. Терри, Р. И. Т. Вонг и С. Ферри.

Хенрик Торунчик из Математического института Польской Академии наук в Варшаве и Чеслав Бессага из Математического института Варшавского университета также сообщили много задач и результатов, в особенности касающихся теории линейных пространств.

Мы кратко опишем три круга недавних результатов в бесконечномерной топологии и затем укажем три области исследований, в которых ожидается высокая активность. Будут выявлены также взаимоотношения бесконечномерной топологии и других областей математики.

1. Недавние результаты подчеркнули тесные связи бесконечномерной топологии с теорией ретрактов. Джеймс Вест, специфически используя теорию Q-многообразий, показал, что каждый ANR-компакт имеет гомотопический тип конечного полиэдра. Недавно Р. Эдвардс получил более сильный результат — локально компактное сепарабельное метрическое пространство X является сомножителем Q-многообразия ($X \times Q$ гомеоморфно Q-многообразию) тогда и только тогда, когда X есть ANR-пространство. Для компактов это влечет за собой результат Веста и характеризует также AR-компакты как Q-факторы, т.е. сомножители гильбертова кирпича Q. В дополнение к ранним результатам Торунчик доказал, что полное сепарабельное метрическое пространство является сомножителем l_2-многообразия тогда и только тогда, когда X есть ANR-пространство. Более того, результат Торунчика об ANR-пространствах применим к многообразиям, смоделированным на многих линейных метрических пространствах. В свете результата Эдвардса ясно, что локально компактные и компактные AR-пространства или

ANR-пространства удобно изучать, умножая их на Q и используя теорию Q-многообразий. Многие свойства AR-пространств и ANR-пространств и деформаций таких пространств теперь получаются автоматически.

2. В конце 1974 г. Д. Тейлор показал, что существует такое клеточно-подобное отображение (т.е. отображение с тривиальными шейпами прообразов точек) бесконечномерного компакта X на Q, что X не имеет тривиального шейпа. Тейлор использовал технику обратных спектров и примеры Адамса и Кана. Как следствие примера Тейлора получается известный результат (Кёртис, Р. Эдвардс, Кислинг, Козловский) о том, что Q можно клеточно подобно отобразить на бесконечномерный компакт, не являющийся ретрактом. Следовательно, известный результат о том, что CE-отображения сохраняют шейп, если образ конечномерен (Андерсон, Козловский и в специальном случае Шер) или если прообраз и образ суть ANR-пространства (Арментраут — Прайс, Козловский, Лакер), не может быть распространен на все компоненты. На основе результатов Козловского о наследственной шейповой эквивалентности следующие вопросы (старые в некоторых постановках) теперь кажутся более важными и, возможно, решаемыми.

(А) Можно ли конечномерный компакт клеточно подобно отобразить на бесконечномерный?

(Б) Всякий ли бесконечномерный компакт содержит n-мерное подмножество (не обязательно замкнутое) для каждого n?

Утвердительное решение каждого из них дает отрицательное решение другого. Заметим, что пример Хендерсона дает бесконечномерный компакт, не содержащий никакого одномерного компакта. Вопрос о том, что бесконечномерный компакт необходимо содержит n-мерные незамкнутые подмножества, кажется до сих пор открыт.

3. Ранние результаты Гэгана о том, что пространство $H(M)$ гомеоморфизмов n-мерного компактного многообразия M допускает l_2-сомножитель ($H(M) \approx H(M) \times l_2$), и Торунчика о том, что для любого полного метрического ANR-пространства X произведение $X \times l_2$ является l_2-многообразием, непосредственно влекут за собой, что $H(M)$ есть l_2-многообразие тогда и только тогда, когда $H(M)$ есть ANR-пространство. В самом деле, Хавер недавно заметил, что $H(M)$ есть ANR-пространство, если для любой n-мерной клетки B^n пространство $H_\partial(B^n)$ гомеоморфизмов B^n, тождественных на границе, является абсолютным ретрактом. Значит, проблема теперь сводится к AR-проблеме одной n-мерной клетки. Эта проблема решена для $n = 1, 2$.

4. Растет количество результатов, связывающих топологию Q-многообразий с топологией конечномерных многообразий посредством процесса стабилизации, умножения на Q или отобра-

сывания Q-сомножителей. Сюда относятся недавние тонкие результаты Чепмэна—Зибенмана о компактификации Q-многообразий. В своей диссертации Черин начал исследование взаимоотношений между теорией локально компактных пространств (ANR-пространств) и теорией Q-многообразий, эксплуатируя данную Чепмэном характеризацию шейпа компакта в терминах дополнений до Z-множеств в Q. Вообще следует ожидать роста исследований о связи свойств конечномерных и бесконечномерных многообразий и о связи свойств Q-многообразий и шейпов.

5. Одна из областей усиленной активности и в то же время небольшого количества полученных результатов—это действие групп на гильбертовом кубе и на Q-многообразиях. Проблемы начинаются с вопроса: будут ли эквивалентными любые два полусвободных периодических действия на Q (с тем же самым периодом и единственной неподвижной точкой) и продолжаются ли действия групп на многообразиях? Ранний результат Вонга о том, что два конечных периодических действия на Q с единственной неподвижной точкой эквивалентны, если их периоды совпадают и каждое имеет сколь угодно малые инвариантные стягиваемые окрестности неподвижной точки, остается наиболее сильным стандартным утверждением (хотя некоторые более общие условия были даны Эдвардсом и Хастингсом). В эту тематику вовлечены тонкие вопросы из теории собственных гомотопических типов.

6. Остаются открытыми классические вопросы топологической характеризации гильбертова куба Q и его псевдовнутренности s без привлечения произведений, линейных пространств или выпуклых подмножеств линейных пространств. Похоже, что новые удобные для применений характеризации Q или s должны вести к построению новых теорий.

Наконец, мы упомянем область, исследования в которой достаточно хорошо завершены недавними результатами. Старый результат бесконечномерной топологии касается объединения двух таких множеств X_1 и X_2, что X_1, X_2 и $X_1 \cap X_2$ одновременно гомеоморфны Q или s. Является ли в этом случае $X_1 \cup X_2$ необходимо гомеоморфным Q или s? На эти вопросы даны отрицательные ответы. Окончательный результат, полученный здесь, обязан своим появлением Шеру, который, применяя к Q данную Итоном обобщенную конструкцию «собачья кость», показал, что некоторое факторпространство гильбертова куба, не гомеоморфное Q, можно разрезать на два экземпляра Q, пересечение которых также гомеоморфно Q. Дополняя это, Хэндел доказал, что объединение двух экземпляров Q гомеоморфно Q, если их пересечение гомеоморфно Q и является Z-множеством хотя бы в одном из слагаемых. Наконец, в контрасте с этим

Квинн и Вонг показали, что объединение двух выпуклых гильбертовых кубов в l_2 гомеоморфно Q, если их пересечение гомеоморфно Q.

II. CE *Образы ANR-пространств и Q-многообразий*

В теории Q-многообразий основная проблема, касающаяся CE-отображения, состоит в том, чтобы дать условия, при которых для CE-отображения f: $M \to Y$ Q-многообразия M его образ Y гомеоморфен M. По теореме Чепмэна о CE-отображении этот вопрос эквивалентен аналогичному вопросу в случае, когда Y есть Q-многообразие.

(M) При каких условиях CE-образ Q-многообразия остается Q-многообразием?

В связи с проблемами типа (M) мы будем иметь дело только с ситуациями, в которых прообраз каждой точки является Z-множеством, поскольку стягивание в точку дикой дуги (Вонг) или сомножителя Q_1 в Q дает не Q-многообразие. Но даже эта улучшенная ситуация допускает контрпримеры. Модификация рассуждений Итона о существовании разбиений типа «собачья кость» в многомерных евклидовых пространствах показывает, что и в Q имеется разбиение «собачья кость», т.е. существует такой эпиморфизм f: $Q \to Y$, что Y не гомеоморфно Q, каждый невырожденный прообраз точки есть дуга, являющаяся Z-множеством, и множество точек Y, в которых f не взаимно однозначно, является канторовым множеством. В этом случае, согласно (1в) (см. ниже), Y есть абсолютный ретракт, но даже этого не получается в общем случае, поскольку пример Тейлора дает CE-отображение f: $X \to Q$ на гильбертов кирпич, не являющееся шейповой эквивалентностью; поэтому, рассматривая X как Z-множество в Q и беря факторотображение F: $Q \to Q \cup Q$, получаем CE-отображение из Q на пространство, не являющееся AR-пространством.

Из-за примера Тейлора возникает интерес в нахождении условий, при которых CE-образ Q-многообразия является ANR-пространством. Эта проблема эквивалентна более старой проблеме нахождения условий, при которых CE-образ (локально компактного) ANR-пространства является ANR-пространством. В самом деле, если f: $X \to Y$ есть CE-отображение такого ANR-пространства, то $f' = fp$: $X \times Q \to Y$ (где p: $X \times Q \to X$ — стандартное проектирование) есть CE-отображения Q-многообразия согласно результату Эдвардса. Козловский определил наследственную шейповую эквивалентность как такое собственное отображение f: $X \to Y$, что f: $f^{-1}B \to B$ есть шейповая эквивалент-

ность для всякого замкнутого подмножества $B \subset Y$, и показал, что:

(1) CE-отображение $f\colon X \to Y$ ANR-пространства X является наследственной шейповой эквивалентностью тогда и только тогда, когда Y есть ANR-пространство. Его теоремы вьеторисовского типа тогда утверждают, что Y будет ANR-пространством в следующих случаях:

(1а) Y является счетной суммой замкнутых конечномерных подпространств;

(1б) Y — счетномерный компакт;

(1в) множество невырожденности $\{y \in Y\colon f_y^{-1}$ не одноточечно$\}$ отображения f конечномерно (или, более общим образом, содержится в подмножестве пространства Y, имеющем большую индуктивную размерность).

(A) При каких условиях CE-образы ANR-пространств остаются ANR-пространствами?

Эта проблема может быть тесно привязана к (M).

Скажем, что отображение $f\colon X \to Y$ *определяется подмножеством* A пространства X, если всякий неодноточечный прообраз $f^{-1}y$ лежит в A. Следующий полезный результат был известен Весту и другим.

(2) Если $f\colon M \to Y$ есть CE-отображение Q-многообразия M на ANR-пространство, которое определяется на Z-подмножестве M, то f — почти гомеоморфизм.

Теперь рассмотрим CE-отображение $f\colon M \to Y$, определенное на Q-многообразии M. Отождествим M с $M \times \{0\} \subset M \times Q$ и рассмотрим факторотображение $F\colon M \times Q \to (M \times Q) \cup_f Y = N$. Из классического результата Борсука — Уайтхеда — Ханнера вытекает, что N и Y являются ANR-пространствами одновременно. Теперь отождествим M с $M \times \{1\} \subset M \times [0,\ 1]$ и рассмотрим факторотображение $M \times [0,\ 1] \to (M \times [0,\ 1]) \cup_f Y = M(f)$, где $M(f)$ — цилиндр отображения f. Поскольку M есть Z-множество и в $M \times Q$, и в $M \times [0,\ 1]$, ситуации схожи и по теореме о продолжении гомеоморфизма Z-множеств получаем диаграмму

$$\begin{array}{ccc} M \times Q & \cong & M \times [0,\ 1] \\ \downarrow & & \downarrow \\ N & \cong & M(f), \end{array}$$

где исходный гомеоморфизм — тождественное отображение Y. По теореме (2) N есть Q-многообразие тогда и только тогда, когда N есть ANR-пространство. Резюмируя, мы имеем: для CE-отображения $f\colon M \to Y$ пространство Y является абсолютным

окрестностным ретрактом $\Leftrightarrow$, f есть наследственная шейповая эквивалентность $\Leftrightarrow$, индуцированное отображение $M \times Q \to N$ является почти гомеоморфизмом. Таким образом, (A) эквивалентно

(Z) При каких условиях образы Q-многообразий при CE-отображениях, которые определяются на Z-множествах, остаются Q-многообразиями?

Следующие проблемы вырастают из (A).

(CE 1) Пусть f: $Q \to Y$ — эпиморфизм, при котором прообразы точек гомеоморфны Q. Будет ли тогда Y абсолютным ретрактом? Используя конусы и теорему Эдвардса о факторах, видим, что эта проблема эквивалентна вопросу Борсука: если X есть ANR-компакт и прообразы точек при отображении f: $X \to Y$ суть абсолютные ретракты, то будет ли Y ANR-пространством?

(CE 2) Будет ли CE-образ n-мерной клетки абсолютным ретрактом? Это эквивалентно вопросу: будет ли конечномерен CE-образ конечномерного компакта? В самом деле, имея CE-отображение f: $X \to Y$ с $\dim X < \infty$, вложим X в некоторое B^n и рассмотрим факторное отображение F: $B^n \to B^n \cup_f Y$. Если $B^n \cup_f Y$ — абсолютный ретракт, то F и f — наследственные шейповые эквивалентности, а они не повышают размерности. Импликация в другую сторону получается из (1а).

Представляет интерес даже следующий специальный случай.

(CE 3) Будет ли положительным ответ в (CE 2), если дополнительно предположить, что невырожденные прообразы точек суть дуги?

Некоторые из этих вопросов частично возникают при изучении разбиений многообразий. Ситуация в настоящее время такова, что имеется полная информация о гомотопических группах, но нет никакой информации относительно гомотопий.

(CE 4) Если X гомеоморфно B^n или R^n и отображение f: $X \to Y$ клеточно подобно, то будет ли Y стягиваемо?

Следствием теорем (1), (1в) и (2) является теорема, объявленная ранее Андерсоном.

(3) Если M есть Q-многообразие, то CE-отображение f: $M \to Y$, определенное Z-множеством и имеющее конечномерное множество невырожденности, является почти гомеоморфизмом.

В разбиении гильбертова кирпича типа «собачья кость» объединение невырожденных прообразов точек не лежит даже в σ-Z-множестве.

(CE 5) Предположим, что f: $Q \to Y$ — CE-отображение на абсолютный ретракт и объединение невырожденных прообразов точек лежит в σ-Z-множестве в Q. Будет ли тогда Y гомеоморфно Q? Аналогичный вопрос возникает, если мы потребуем

только, что все невырожденные прообразы точек лежат в псевдовнутренности Q.

Даже случаи, в которых имеется лишь счетное число нетривиальных прообразов, представляют интерес (в этом случае Y всегда ANR-пространство в силу (1в)).

(CE 6) Будет ли CE-образ Q гомеоморфен Q, если отображение имеет лишь счетное число неодноточечных прообразов? Известно, что ответ положителен в том случае, когда нетривиальные прообразы точек образуют G_δ-множество.

(CE 7) Будет ли Y гомеоморфнс Q, если (а) семейство невырожденных прообразов точек является нулевым (т.е. имеется только конечное число множеств диаметра $> \varepsilon$ для всякого $\varepsilon > 0$) и (или) если (б) замыкание в Y множества невырожденности отображения f нульмерно?

(CE 8) Предположим, что f: $Q \to Y$ — CE-отображение на абсолютный ретракт. Найти условия и примеры, когда $Y \times \times I^k \cong Q$ для некоторого конечного k. Напомним, что, как показали Брайан и Чепмэн, $Y \times I \cong Q$ в случае, когда f имеет ровно один нетривиальный прообраз точки и он является конечномерной клеткой. Р. Эдвардс заявил, что $Y \times I \cong Q$, если f имеет ровно один нетривиальный прообраз точки и он является конечномерным кубовидным компактом (при доказательстве используются вариации рассуждений Штанько).

Интересен также следующий вопрос, относящийся к l_2-многообразиям.

(CE 9) Предположим, что Y — полное сепарабельное метрическое ANR-пространство, являющееся замкнутым клеточно подобным образом l_2-многообразия M. Будет ли Y l_2-многообразием? Этот вопрос, естественно, приводит к следующему: будет ли сжимаемым в смысле Бинга разбиение многообразия M, состоящее из (компактных) прообразов точек отображения $M \to Y$?

Из известных теорем вытекает, что стабилизированное разбиение, получаемое умножением на l_2 или Q, сжимаемо.

III. SC *Шейпы компактов в бесконечномерной топологии*

Теория шейпов стала полезным инструментом бесконечномерной и геометрической топологии. Со времени доказательства Чепмэном того, что два Z-множества в Q имеют одинаковый шейп тогда и только тогда, когда их дополнения гомеоморфны, глубокие результаты Чепмэна, Р. Эдвардса, Миллера и Веста, привлекающие CE-отображения, решительно продемонстриро-

вали силу теоретико-шейповых концепций в решении классических проблем. Проблемы, появляющиеся здесь, касаются большей частью лишь тех аспектов теории шейпов, которые непосредственно связаны с бесконечномерной топологией. Что касается чистых задач теории шейпов, то в работах Борсука часто содержатся целые списки таких проблем.

Мы повторим две задачи из CE-секции.

(SC 1) Верно ли, что клеточно-подобные отображения не повышают размерность? Этот вопрос эквивалентен следующему: является ли шейповой эквивалентностью клеточно-подобное отображение конечномерного пространства?

(SC 2) Всякий ли бесконечномерный компакт содержит подмножество любой наперед заданной размерности? Заметим, что положительный ответ влечет положительный ответ и на вопрос (SC 1).

(SC 3) Будет ли шейповой эквивалентностью CE-отображение $f\colon X \to Y$, множество невырожденности которого счетномерно?

(SC 4) Будут ли гомеоморфны компактные Q-многообразия M и N, если существуют компакт X и наследственные шейповые эквивалентности $f\colon X \to M$ и $g\colon X \to N$?

(SC 5) Будут ли гомеоморфны компактные Q-многообразия M и N, для которых существуют компакт X и CE-отображения $f\colon M \to X$ и $g\colon N \to X$?

(SC 6) Пусть $Y \to X$ — включение, являющееся шейповой эквивалентностью. Дать условия, при которых для всякого (абсолютно окрестностного ретракта) $P \supset X$ выполняется следующее свойство: для каждой окрестности V пространства Y и каждой окрестности U пространства X существует такая гомотопия $f_t\colon X \to U$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, что (1) $f_0(x) = x$ для всех $x \in X$, (2) $f_1(X) \subset V$ и (3) $f_t(y) = y$ для всех $y \in Y$ и $0 \leqslant t \leqslant 1$.

(SC 7) Пусть X и Y — компакты, а A и B — их компактные подмножества. Пусть $f\colon X \to Y$ — такое отображение, гомеоморфно переводящее $X \setminus A$ на $Y \setminus B$, что ограничение $f|A\colon A \to B$ является шейповой эквивалентностью. Будет ли тогда само f шейповой эквивалентностью? Аналогичный вопрос возникает и для ANR-компактов X и Y?

(SC 8) Если X и Y — шейпово эквивалентные UV^1-компакты, то существует ли конечная диаграмма $X = X_0 \leftrightarrow X_1 \leftrightarrow \ldots \leftrightarrow X_n = Y$, в которой $X_i \leftrightarrow X_{i+1}$ есть наследственная шейповая эквивалентность либо из X_i в X_{i+1}, либо из X_{i+1} в X_i?

(SC 9) Если A — Z-множество в Q и факторпространство Q/A является абсолютным окрестностным ретрактом, то будет ли A шейпово доминироваться некоторым полиэдром?

(SC10) Пусть $f\colon (X, x) \to (Y, y)$ — морфизм пунктированной теории шейпов, индуцирующий изоморфизм каждой гомотопической про-группы.

При каких предположениях f будет (пунктированной) шейповой эквивалентностью? (Замечание: этой проблеме посвящена обширная литература. Имеются хорошие теоремы и хорошие контрпримеры. Наш вопрос касается получения возможно лучшей положительной теоремы.)

IV. PF *Произведения и сомножители*

Р. Эдвардс недавно доказал, что всякое локально компактное сепарабельное метрическое ANR-пространство является сомножителем Q-многообразия (обратное утверждение верно тривиальным образом). Этот долго искавшийся результат является Q-аналогом данной Торунчиком характеризации сомножителей l_2-многообразий: всякое полное сепарабельное метрическое ANR-пространство является сомножителем l_2-многообразия.

Результат Эдвардса вместе с теоремой Чепмэна о триангулируемости Q-многообразий дает другое доказательство теоремы Веста о том, что всякий ANR-компакт имеет конечный гомотопический тип.

(PF1) Дать внутреннюю характеризацию пространств X, для которых $X \times I$ гомеоморфно Q. Каковы взаимоотношения между условиями $X \times I \cong Q$ и $X \times X \cong Q$? Черин, распространяя неопубликованные результаты Брайана и Чепмэна, показал, что $(Q/A) \times I \cong Q \cong Q/A \times Q/A$ для всякой замкнутой n-мерной клетки $A \subset Q$.

Другим следствием этого результата Эдвардса вместе с теоремой Веста является то, что всякое счетное бесконечное произведение невырожденных AR-компактов гомеоморфно Q. Соответствующий вопрос для произведения l_2-факторов остается открытым.

(PF2) Всякое ли счетное бесконечное произведение некомпактных полных сепарабельных метрических AR-пространств гомеоморфно l_2? Мы можем предположить, что каждый сомножитель содержит замкнутый экземпляр прямой, так как нетрудно показать, что каждое произведение двух таких сомножителей этим свойством обладает. Каково положение в специальном случае, когда каждый сомножитель является стягиваемым Q-многообразием?

Как другой специальный случай, мы рассмотрим следующее произведение:

(PF3) Пусть P — множество всех точек в замкнутом единичном шаре l_2, которые имеют не более одной ненулевой координаты (P иногда называют «дикобразом»). Будет ли $\prod_{i=1}^{\infty} P$ го-

меоморфно l_2?

(PF 4) (1) Верно ли, что $X \times X \cong s \Rightarrow X \cong s$?
(2) Верно ли, что $X \times I \cong s \Rightarrow X \cong s$?
(3) Верно ли, что $X \times Q \cong s \Rightarrow X \cong s$?

Заметим, что если $X \times Y$ гомеоморфно s для некоторого локально компактного Y, то $X \times Y \times Q$ гомеоморфно s, и так как $Y \times Q$ есть Q-многообразие, то $X \times Q$ есть стягиваемое s-многообразие и, значит, $X \times Q$ гомеоморфно s.

V. Qs *Конусные характеризации* Q *и* s

Главная остающаяся проблема — получить полезные и простые топологические характеризации Q и s, не зависящие явным образом от свойств линейных пространств или от структуры пространства, как произведения пространств. Что касается структур линейного пространства и произведения, отметим, что Келлер доказал в 1931 г., что любое компактное выпуклое бесконечномерное подмножество l_2 гомеоморфно Q, а комбинация недавних работ Веста и Эдвардса показывает, что любое счетное бесконечное произведение компактов гомеоморфно Q тогда и только тогда, когда каждый сомножитель является абсолютным ретрактом и бесконечное число из них не вырождено. Что касается s, то принадлежащие Андерсону и Кадецу результаты характеризуют s как топологическое пространство, гомеоморфное любому сепарабельному бесконечномерному пространству Фреше[1)], а результаты, принадлежащие Торунчику, утверждают, что $X \times s$ гомеоморфно s тогда и только тогда, когда X — топологически полное сепарабельное метрическое AR-пространство. Окончательная возможная характеризация s, как произведения AR-пространств, еще не установлена и формулируется в разделе PF.

Было очень интересно получить топологическую характеризацию s и Q в более общих или по крайней мере в отличных от упомянутых терминах. Специфические проблемы, представляющие интерес, следующие:

(Qs1) являются ли точка и Q единственными однородными стягиваемыми метризуемыми компактами?

1) То есть замкнутому линейному подпространству некоторого счетного произведения банаховых пространств, или, что то же самое, локально выпуклому метрическому пространству. — *Прим. перев.*

(Qs2) является ли s единственным сепарабельным стягиваемым не локально компактным метризуемым пространством? Специальные случаи (Qs1) и (Qs2) суть нижеследующие (Qs3) и (Qs4), в которых стягиваемость усиливается до условия — «быть конусом». Разумеется, однородность и конусная структура дают условия, совершенно похожие на те, которые получаются из структуры произведения.

(Qs3) Пусть X — однородный компакт, гомеоморфный своему собственному конусу $\mathrm{Con}(X)$. Будет ли X гомеоморфен Q?

Замечание. По теореме Шори $\mathrm{Con}(Y)\times I$ гомеоморфно $\mathrm{Con}(\mathrm{Con}(Y))$ для любого бикомпакта Y. Следовательно, X гомеоморфно $X\times I$. Если мы сможем доказать, что проектирование p: $X\times I\to X$ либо наклоняемо в смысле Веста, либо является почти гомеоморфизмом, то, применяя обратные спектры, получим, что $X\times Q$ гомеоморфно X. Кроме того, де Гроот заметил, что X локально однородно, т.е. всякая точка $x\in X$ имеет произвольно малые окрестности Ox, такие, что любая точка $y\in Ox$ может быть отображена в любую другую точку $z\in Ox$ посредством автоморфизма X, тождественного вне Ox; а Круненберг показала, что X является n-точечно однородным для любого n. Возможный контрпример может быть получен следующим образом: Шори показал, что $\mathrm{Con}(Y)\times Q$ гомеоморфно своему конусу для любого компакта Y. Однако однородность и локальная стягиваемость в вершине конуса сразу отбрасывают пространства вида $\mathrm{Con}(Y)\times Q$ для пространства Y, подобного канторову множеству или универсальной кривой.

(Qs4) Мы можем поставить проблему, аналогичную (Qs3), и относительно s. Если X — однородное сепарабельное полное метрическое не локально компактное пространство, гомеоморфное своему конусу (при надлежащем определении метрики на конусе), то будет ли X гомеоморфно s?

VI. H *Гиперпространства*

Первоначальные проблемы о гиперпространствах в бесконечномерной топологии в основном были решены. Некоторые проблемы текущего интереса касаются псевдовнутренности для гиперпространств, выпуклых гиперпространств и гиперпространств некомпактных пространств.

Для метрического пространства X через 2^X обозначается гиперпространство всех непустых компактных подмножеств X, а через $C(X)$ — гиперпространство непустых подконтинуумов X, топологизированное метрикой Хаусдорфа. Шори и Вест пока-

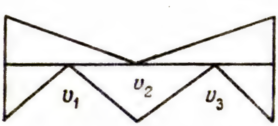
зали, что 2^I гомеоморфно Q и более общим образом 2^Γ гомеоморфно Q для любого невырожденного конечного связного графа Г. Вест также показал, что гиперпространство подконтинуумов $C(D)$ дендрона D гомеоморфно Q тогда и только тогда, когда множество точек ветвления плотно в D. Используя эти результаты, Кёртис и Шори соответственно показали, что 2^X гомеоморфно Q тогда и только тогда, когда X — невырожденный пеановский континуум, и $C(X)$ гомеоморфно Q тогда и только тогда, когда X не содержит ни одной свободной дуги.

Были получены, кроме того, результаты о различных подпространствах 2^X, где X — невырожденный пеановский континуум. В частности, для $A, A_1, \ldots, A_n \in 2^X$ гиперпространство $2^X_A = \{F \in 2^X\colon F \supset A\}$ гомеоморфно Q тогда и только тогда, когда $A \neq X$, в то время как гиперпространство $2^X(A_1, \ldots, A_n) = \{F \in 2^X\colon F \cap A_i \neq \varnothing$ для каждого $i\}$ всегда гомеоморфно Q. Кроме того, для всякого связного компактного полиэдра K существует гиперпространство $2^K_{sst} \subset 2^K$ «малых» подмножеств K, такое, что 2^K_{sst} гомеоморфно $K \times Q$.

Если X имеет аффинную структуру, мы можем рассмотреть выпуклое гиперпространство $cc(X) \subset 2^X$, состоящее из всех компактных выпуклых подмножеств X. Надлер, Квинн и Ставрокас показали, что $cc(X)$ гомеоморфно Q для всякого компактного выпуклого подмножества $X \subset l_2$ размерности $\dim X > 1$. Они также показали для $X \subset R^2$ с $cc(X) \cong Q$ (X не обязательно выпукло), что X должно быть двумерной клеткой. Кёртис, Квинн и Шори показали, что если $X \subset R^2$ — *полиэдральная* двумерная клетка, то $cc(X)$ гомеоморфно Q тогда и только тогда, когда X не содержит никакого сингулярного сегмента (сегмент $J \subset X$ называется *сингулярным*, если он содержит в своей внутренности три вершины v_1, v_2, v_3, в которых X не является локально выпуклым пространством, и при этом сторона J, определенная средней вершиной v_2, противоположна той, которая определена вершинами v_1 и v_3[1]).

Кёртис недавно показал, что 2^X является абсолютным ретрактом тогда и только тогда, когда метрическое пространство X связно и локально связно континуумами. Получены также две другие, более специфические характеризации: (1) 2^X гомеоморфно $Q \setminus \{$точка$\}$ тогда и только тогда, когда X — локально ком-

[1] Например,



— *Прим. перев.*

пактное связное и локально связное метрическое не компактное пространство; (2) топологически полное сепарабельное связное и локально связное нигде локально не компактное метрическое пространство X вкладывается в пеановский континуум P так, что 2^X является псевдовнутренностью для 2^P тогда и только тогда, когда X допускает метрику со свойством S[1].

(H1) Является ли семейство всех конечных подмножеств I fd-скелетом[2] для 2^I?

(H2) Пусть Γ — конечный связный граф. Являются ли семейства $\{A \in 2^\Gamma: A$ нульмерно$\}$ и $\{A \in 2^\Gamma: A$ гомеоморфно канторову множеству$\}$ псевдовнутренностями для 2^Γ?

Замечание. Только что сформулированные проблемы принадлежат Круненберг, которая решила (H2) для $\Gamma = I$.

(H3) Если $X \subset R^2$ — двумерная клетка, не содержащая ни одного сингулярного сегмента, то будет ли $cc(X)$ гомеоморфно Q?

(H4) Пусть l^∞ — несепарабельное банахово пространство всех ограниченных вещественных последовательностей. Обозначим через $\sim$ отношение эквивалентности на 2^{l^∞}, порожденное изометриями компактов. Будет ли факторпространство $2^{l^\infty}/\sim$ гомеоморфно l_2? (Д. Эдвардс получил некоторые базисные свойства пространства $2^{l^\infty}/\sim$.)

(H5) Будет ли 2^X гомеоморфно l_2 для всякого топологически полного сепарабельного связного и локально связного и нигде не локально компактного метрического пространства X?

VII. QM *Q-многообразия*

Две главные проблемы о Q-многообразиях — триангулируемость и классификация (посредством бесконечного простого гомотопического типа) были решены Чепмэном. Техника PL-многообразий зачастую может быть приспособлена к Q-многообразиям, и ее применение, как правило, проще в бесконечномерном случае.

---

[1] То есть метрику, при которой пространство допускает сколь угодно мелкие конечные покрытия связными множествами. — *Прим. перев.*

[2] Подмножество Y пространства X называется его fd-скелетом, если Y можно представить в виде суммы растущей последовательности конечномерных Z-множеств Y_i, так, что для всякого $\varepsilon > 0$, натурального m и конечномерного Z-множества $A \subset X$ существует $n \geqslant m$ и гомеоморфизм $h: X \to X$, такие, что

а) $\rho(h, \mathrm{id}) < \varepsilon$,

б) $h | Y_m = \mathrm{id}$,

в) $RA \subset Y_n$. — *Прим. перев.*

(QM1) Построить локально плоское вложение коразмерности 3 одного Q-многообразия в другое, которое не имеет нормального расслоения. Конечномерные примеры существуют. Чепмэн показал, что произвольной коразмерности вложение Q в произвольное Q-многообразие является плоским, что, разумеется, неверно, даже в коразмерности 1, когда мы заменяем Q на произвольное Q-многообразие.

(QM2) Пусть X — компактное Q-многообразие и $\mathscr{U}$ — конечное открытое покрытие X стягиваемыми подмножествами, такое, что пересечения подсемейств из $\mathscr{U}$ либо пусты, либо стягиваемы. Будет ли X гомеоморфно $N(\mathscr{U})\times Q$? Здесь $N(\mathscr{U})$ обозначает нерв $\mathscr{U}$.

(QM3) Существует ли для данного Q-многообразия M такое $\varepsilon>0$, что если r: $M\to N$ — ретракция на Q-многообразие N с $\operatorname{diam} r^{-1}(n)<\varepsilon$ для каждого $n\in N$, то r близко к гомеоморфизму?

Собственный эпиморфизм f: $M\to N$ называется *аппроксимационным расслоением* (Корам — Дювал), если для данного пространства X, отображений g: $X\times\{0\}\to M$ и H: $X\times I\to N$, таких, что $fg=H\mid X\times\{0\}$, и открытого покрытия $\mathscr{U}$ пространства N существует такое отображение G: $X\times I\to M$, что G продолжает g, а fG $\mathscr{U}$-близко к H.

(QM4) Если f: $M\to N$ аппроксимационное расслоение Q-многообразий, то когда оно близко к локально тривиальным расслоениям?

(QM5) Пусть M, N — есть компактные Q-многообразия, а f, g: $M\to N$ — близкие локально тривиальные расслоения. Можно ли f и g связать гомотопией, состоящей из таких же отображений?

(QM6) (Послойная стабильность.) Пусть $E\to Q$ — компактное ANR-расслоение, каждый слой которого гомеоморфен гильбертову кубу. Существует ли тогда гомеоморфизм пространства E на произведение $E\times Q$, сохраняющий слои? Из положительного ответа следовало бы, что отображение $E\to Q$ является тривиальным расслоением. Известно, что ответ положителен, если базу Q заменить полиэдром.

VIII. CMP *Компактификации*

Некомпактное Q-многообразие M *допускает компактификацию*, если существует такое компактное Q-многообразие $N\supset M$, что $N\setminus M$ есть Z-множество в N. Чепмэн и Зибенман рассматривали эту проблему и достигли успеха в нахождении об щих алгебраических условий, при которых компактификации существуют. Чепмэн и Ферри сделали еще один шаг и нашли

алгебраические условия, которые гарантируют то, что Z-множество $N \setminus M$ является Q-многообразием. Торунчик (и независимо Ферри) усилили теорему Веста следующим образом: если X есть ANR-компакт, а $A \subset X$ — такое Z-множество, что $X \setminus A$ является Q-многообразием, то X также является Q-многообразием. На самом деле если A замкнуто и смутно в X, то предположение о том, что X есть ANR, излишне (см. ANR).

Здесь мы приводим вопросы, касающиеся конечномерной версии результата Чепмэна — Ферри.

(CMP1) Если K — некомпактный полиэдр, то когда мы можем добавить к K некоторый компакт, чтобы получить ANR-пространство?

(CMP2) Если K — некомпактный полиэдр, то в каком случае одноточечная компактификация к K является ANR-пространством?

(CMP3) Если $E \to S^1$ — локально тривиальное расслоение со слоем F, некомпактным Q-многообразием, таким, что F допускает компактификацию, то когда существует локально тривиальное расслоение $\tilde{E} \to S^1$, содержащее E как подрасслоение и такое, что всякий слой $\tilde{E}_X$ есть компактное Q-многообразие, являющееся компактификацией слоя E_X?

(CMP4) Приведенные выше определения могут быть интерпретированы в терминах ANR-пространств. Какое ANR-пространство допускает компактификацию, являющуюся Z-множеством? Необходимое условие состоит в том, что $Q \times A$ допускает компактификацию, являющуюся Z-множеством. Значит, A — ручное в ∞ смысле Чепмэна — Зибенмана и инварианты σ_∞ и τ_∞ должны превращаться в нуль. Является ли условие достаточным?

Эквивалентный вопрос: если Q-многообразие $Q \times A$ допускает компактификацию, являющуюся Z-множеством, то допускает ли A компактификацию, являющуюся Z-множеством?

IX. GA *Действия компактных групп*

Одна из наиболее трудных и интересных в настоящее время областей бесконечномерной топологии касается вопросов действия компактных групп на гильбертовом кирпиче Q или на Q-многообразиях. Вест показал, что компактные (метризуемые) группы могут действовать на l_2 с произвольными замкнутыми множествами в качестве множеств неподвижных точек. Как отмечается ниже, рутинное применение теории накрывающих пространств показывает, что всякие два свободных периодических гомеоморфизма простого периода p с неподвижной точкой на l_2 эквивалентны (т.е. сопряжены один к другому). Известно

много интересных примеров, касающихся действий на Q или на Q-многообразиях, но основные здесь вопросы все еще открыты.

Вопросы групповых действий на Q, s или на смоделированных на них многообразиях значительно отличаются от аналогичных вопросов в конечномерной топологии, но примеры из теории конечномерных многообразий и полиэдров дают богатый набор «строительных блоков». Поскольку и Q, и S могут быть представлены как бесконечные произведения своих копий или других сомножителей, групповые действия могут быть индуцированы на произведении действиями на сомножителях, как объясняется ниже в примерах 1, 2, и 3.

Мы используем результат Веста о том, что любое счетное бесконечное произведение невырожденных Q-факторов гомеоморфно Q, вместе с теоремой Эдвардса о том, что всякий AR-компакт является Q-фактором. Следовательно, любое счетное бесконечное произведение невырожденных AR-компактов гомеоморфно Q. Мы также используем тот факт, что конус над любым ANR-пространством является AR-пространством.

Действие G на X называется *эффективным* или *свободным*, если для любых g_1, $g_2 \in G$ и $x \in X$ имеем $g_1 x = g_2 x$ тогда и только тогда, когда $g_1 = g_2$, т.е. каждая орбита полна. Действие называется *строго полусвободным*, если существует одна точка p, неподвижная для всех $g \in G$, и G действует на $X \setminus \{p\}$ свободно. Пусть $Q_0 \setminus \{\text{точка}\}$. Поскольку $s \cong Q \times s \cong Q_0 \times s$, то действия на Q или Q_0 могут быть использованы для получения действий на s.

Пример 1 (Вест). Поскольку любая компактная группа Ли G действует строго полусвободно на своем конусе $\operatorname{con}(G)$ левыми сдвигами на уровнях, мы знаем, что G действует строго полусвободно на счетном бесконечном произведении $\prod_i \operatorname{con}(G) \cong Q$ и, значит, свободно на Q_0 и также на s. Мы называем такое действие *стандартным* свободным действием на Q_0 или на s.

Пример 2. Пусть G — любое строго полусвободное действие на Q. Тогда $G-$ может быть рассматриваемо как действие на $\operatorname{con}(Q) \cong Q$ с дугой T из неподвижных точек и с первоначальным действием на каждом уровне конуса, кроме вершины. Теперь стянем дугу T неподвижных точек в одну точку. Поскольку T есть Z-множество, результирующее факторпространство Q' все еще гомеоморфно Q, но индуцированное действие на Q' имеет интересные инвариантные множества.

Пример 3. Для каждого $i > 0$ пусть X_i — невырожденный абсолютный ретракт, и пусть G_i — строго полусвободное групповое действие на X_i. Пусть π_{i+1} — гомоморфизм из G_{i+1} на G_i. Тогда $\varprojlim G_i$ действует строго полусвободно на $\Pi X_i \cong Q$ и свободно на Q_0 при координатном определении действия. Поэтому, например, любая соленоидальная группа или канторова

группа могут действовать строго полусвободно на Q. В случае когда связывающие отображения являются изоморфизмами, получаются различные действия группы G_1 на Q.

Вонг показал, что любые два строго полусвободных периода p гомеоморфизма гильбертова кирпича Q, которые имеют сколь угодно малые стягиваемые окрестности неподвижной точки (*тривиальны* в неподвижной точке), эквивалентны. Это пока единственный известный фундаментальный результат. Он показывает, что разнообразные полусвободные периода p гомеоморфизмы, возникающие из примеров 2 и 3, эквивалентны.

Основной аппарат для изучения свободных действий конечных групп на Q_0 или s — элементарная теория накрывающих пространств. Так, например, два свободных действия группы Z_p эквивалентны, если их пространства орбит гомеоморфны. Для таких действий на s или Q_0 пространства орбит суть пространства Эйленберга — Маклейна, гомотопические типы которых полностью определяются их гомотопическими группами. Поскольку все l_2-многообразия (или Q-многообразия, имеющие в качестве сомножителя полуинтервал) характеризуются гомотопическим типом, мы знаем, что любые два пространства орбит соответствующего типа гомеоморфны и, значит, действия, дающие эти пространства орбит, эквивалентны. Для Q_0 эти рассуждения уже не проходят, поскольку Q-многообразия вообще характеризуются не гомотопическим типом, а бесконечным простым гомотопическим типом.

Вест, использовав работу Зибенмана о бесконечной простой гомотопической эквивалентности и чепмэновскую триангулируемость Q-многообразий, показал, что для конечной (или счетной дискретной) группы G свободные G-действия на Q_0 классифицируются *собственным* гомотопическим типом пространств орбит. Д. А. Эдвардс и Хастингс показали, что (1) теорема Уайтхеда зибенмановского типа неверна в бесконечномерной ситуации и (2) нет единственности групповых действий в теории про-гомотопий (pro-H). Представляется, что для установления единственности свободных G-действий на Q_0 необходима некоторая комбинация теории гомотопий и геометрии.

Ниже следуют некоторые типичные специфические вопросы, относящиеся к полусвободным действиям на Q. В случае когда ответы на них отрицательны, естественно возникают вопросы классификации.

(GA1) Для каких простых $p > 2$ всякие два p-периодических гомеоморфизма Q эквивалентны? Можно поставить похожие вопросы о действиях непростого периода. Никаких контрпримеров пока неизвестно.

(GA2) Пусть $f: Q \to Q$ — p-гомеоморфизм Q на себя, имею-

щий ровно одну неподвижную точку x и простой период. Должен ли f быть тривиальным в точке x?

Понятие тривиальности может быть распространено на периодические гомеоморфизмы, неподвижные на произвольном стягиваемом замкнутом множестве.

Если $m\colon Y \to Y$ — отображение, пусть $\varphi(m)$ обозначает множество неподвижных точек отображения m.

(GA3) Предположим, что $f, g\colon Q \times [0, 1] \to Q \times [0, 1]$ — p-периодические сохраняющие уровни гомеоморфизмы, имеющие множество неподвижных точек $\varphi(f) = x \times (0, 1] = \varphi(g)$ для некоторой точки $x \in Q$. Будет ли f эквивалентно g посредством сохраняющего уровни гомеоморфизма $h\colon Q \times [0, 1] \to Q \times [0, 1]$?

(GA4) Что будет, если мы дополнительно предположим тривиальность f и g на множестве $x \times [0, 1]$?

Если ответы на эти вопросы положительны, то можно заменить отрезок $[0, 1]$ на куб $[0, 1]^n$ или полиэдр.

(GA5) Пусть K — Z-множество в Q, гомеоморфное n-мерному кубу. Пусть $f, g\colon Q \to Q$ — такие p-периодические гомеоморфизмы, что $\varphi(f) = K = \varphi(g)$, и g и f тривиальны на множестве K. Будут ли f и g эквивалентны?

При рассмотрении групповых действий на Q-многообразиях основные вопросы касаются условий, при которых действия разлагаются в произведения (т.е. факторизуемы) действий на конечномерном многообразии (или полиэдре) и действий на Q. И если два действия свободны и факторизуемы, то мы хотели бы знать условия, при которых они эквивалентны (см. примеры неэквивалентности в препринте Веста). Если имеются нефакторизуемые действия, то при этом происходят существенные смешивания конечномерных и бесконечномерных феноменов, природу которых интересно было бы установить. Заметим, что действия соленоидальной или канторовой групп на Q суть действия существенно бесконечномерного типа.

Конкретно мы спрашиваем:

(GA6) При каких условиях действие компактной группы G на Q-многообразии M, рассматриваемом как $K \times Q$ для некоторого полиэдра K, может быть факторизовано в действие на K посредством действия на Q? (Имеются действия на $S^1 \times Q$, которые возникают скорее из отображений, чем из групповых действий.)

(GA7) При каких условиях (на M) два свободных Z_p-действия на M эквивалентны?

X. TD *Топологическая динамика*

До сих пор практически потоки на Q-многообразиях не изучались, но имеется много естественных вопросов. Поскольку $S^1 \times Q$ гомеоморфно $([0, 1] \times Q)/R$ для любого гомеоморфного

отождествления R множеств $\{0\} \times Q$ и $\{1\} \times Q$, любой дискретный поток на Q может быть канонически вложен в непрерывный поток на $S^1 \times Q$. Вопросы существования минимальных множеств и разнообразных типов потоков, таких, как экспансивные потоки, еще не изучались, за исключением достаточно очевидных примеров. Не трудно показать, что сам гильбертов куб Q допускает регулярно почти периодический гомеоморфизм, не являющийся периодическим. Как счетная степень самого себя, Q допускает также сдвигающий гомеоморфизм.

Мы выделяем две специальные проблемы как представителей намного более широкого класса открытых проблем, присущих типам потоков, изучаемых в топологической динамике.

(TD1) (а) Является ли $S^1 \times Q$ минимальным множеством, т.е. допускает ли $S^1 \times Q$ дискретный поток, все орбиты которого плотны?

Ясно, что такой поток не может быть описан покоординатно как произведение потока на S^1 и потока на Q, поскольку любой дискретный поток на Q имеет неподвижную точку и, значит, любой составной поток имеет инвариантную окружность. Следовательно, утвердительный ответ на (TD1) (а) предполагает существование потока, отличного от смешивания потока на конечномерном многообразии или комплексе с потоком на Q.

(б) Может быть задан более общий вопрос: любое ли компактное Q-многообразие является минимальным множеством?

(TD2) (а) Допускает ли Q экспансивный поток, т.е. существуют ли гомеоморфизм $h: Q \to Q$ и число $\varepsilon > 0$, такие, что для каждой пары $x, y \in Q$, $x \neq y$ найдется n, $-\infty < n < \infty$, для которого $d(h^n(x), h^n(y)) > \varepsilon$?

Ответ представляется отрицательным, поскольку все достаточно интересные потоки на Q предполагают некоторое перемещение координат, а геометрически все координатные пространства с большим номером имеют малый диаметр. Следовательно, любые две точки, которые надо «развести врозь» за короткое время, должны существенно различаться уже на небольшом числе координат.

(б) Может быть задан более общий вопрос: допускает ли произвольное Q-многообразие экспансивный поток?

XI. M *Многообразия, моделированные на бесконечномерных линейных пространствах*

Основополагающие теоремы классификации и представлений многообразий, моделированных на многих бесконечных линейных пространствах, в большом количестве были даны в конце 60-х годов Андерсоном и Шори, Хендерсоном, Вестом и Чепмэ-

ном. Кроме того, они были дополнены результатами из бесконечномерной дифференциальной топологии.

Мы приведем эти теоремы лишь для случая l_2-многообразий. Вот они:

(1) Два l_2-многообразия гомеоморфны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковый гомотопический тип.

(2) M является l_2-многообразием тогда и только тогда, когда M гомеоморфно $K \times l_2$, где K — счетный локально конечный симплициальный комплекс.

(3) Если M есть l_2-многообразие, то M может быть вложено в l_2 в качестве открытого подмножества.

В начале 70-годов Торунчик дал характеризацию l_2 M-факторов.

(4) Если X — полное сепарабельное метрическое пространство, то $X \times l_2$ является l_2-многообразием тогда и только тогда, когда X является абсолютным окрестностным ретрактом.

Эти теоремы мотивировали многие из более поздних работ о Q-многообразиях. Следующие проблемы открыты (см. также (GE9).

(M1) Пусть X — топологически полное сепарабельное метрическое пространство.

(а) Если X есть ANR, $Y \subset X$ плотно в X и является l_2-многообразием, то при каких условиях мы можем заключить, что X есть l_2-многообразие? Торунчик получил такой результат в случае, когда $X \setminus Y$ есть Z-множество в X (напомним, что Z-множества замкнуты, значит, Y открыто в X).

(б) При каких условиях канонически замкнутое подмножество l_2-многообразия является l_2-многообразием?

Хендерсон заметил относительно (а), что если Z -множества строго пренебрежимы в X и $X \setminus Y$ является счетной суммой Z-множеств, то X гомеоморфно Y. Однако представляется трудным проверить эти условия во многих естественно возникающих случаях.

(M2) Всякий ли гомеоморфизм сепарабельного l_2-многообразия на себя может быть аппроксимирован диффеоморфизмами? Бургелия и Хендерсон доказали, что такие гомеоморфизмы изотопны диффеоморфизмами.

В следующих трех проблемах мы предполагаем, что K и M — l_2-многообразия и K является замкнутым подмножеством M. Тогда говорят, что K имеет *локальный недостаток n в точке p*, если существует окрестность U точки p и гомеоморфизм h из $(-1, 1)^n \times l_2$ на U, такие, что $h(\{0\} \times l_2) = K \cap U$. Если K имеет локальный недостаток n в каждой своей точке, то говорят, что K имеет локальный недостаток n. Пусть множество $R \subset K$ таково, что (а) R состоит из единственной точки, (б) R компактно или (в) R есть Z-множество и в M, и в K.

(M3) Если K имеет локальный недостаток 1 в каждой точке из $K \setminus R$, то имеет ли K локальный недостаток 1 для выше перечисленных случаев (а), (б) и (в)?

(M4) При каких условиях локальная недостаточность n для $n > 1$ во всех точках из $K \setminus R$ влечет за собой локальную недостаточность n для K в случаях (а), (б) и (в)? Куйпер дал примеры для $n = 2$, где R есть одна точка, n-мерная клетка или экземпляр l_2, а K не имеет локального недостатка 2. В примерах речь идет об узлах. Для $n > 2$ никаких примеров не известно.

(M5) Для $n > 1$ влечет ли локальная недостаточность n существование окрестности $U \supset K$, являющейся пространством расслоения над K со слоем $(-1, 1)^n$?

(M6) Пусть M и K — l_2-многообразия, причем $K \subset M$ есть Z-множество в M. Тогда K можно рассматривать как «край» M, т.е. для всякой точки $p \in K$ существует такая ее окрестность U в M и такой гомеоморфизм h из U на $l_2 \times (0, 1]$, что $h(K \cap U) = l_2 \times \{1\}$. При каких условиях на пару (M, K) существует такое вложение h пространства M в l_2, что топологическая граница множества $h(M)$ в l_2 совпадает с $h(K)$? Известно, что если тождественное отображение K в M индуцирует гомотопическую эквивалентность, то такое вложение M в l_2 возможно.

(M7) Пусть $\xi: E \to B$ — расслоение над паракомпактным пространством B со слоем F, являющимся l_2-многообразием. Предположим, что K — такое замкнутое подмножество E, что $K \cap \xi^{-1}(b)$ есть Z-множество в слое $\xi^{-1}(b)$ для каждого b. Существует ли тогда сохраняющий слой гомеоморфизм из $E \setminus K$ на E?

(M8) Является ли l_2-многообразием локально стягиваемая полная сепарабельная метрическая не локально компактная топологическая группа?

(M9) Если G — локально стягиваемая сепарабельная метрическая топологическая группа, которая не локально компактна и является счетной суммой компактных конечномерных подмножеств, то будет ли G l_2^f-многообразием?

Замечание. Никакое Q-многообразие не несет структуры топологической группы.

XII. RQ R^∞- и Q^∞-многообразия

Проблема здесь касается перенесения основных теорем об l_2-многообразиях на R^∞-и Q^∞-многообразия, где $R^\infty = \operatorname{dir} \lim R^n$ и $Q^\infty = \operatorname{dir} \lim Q^n$[1]. Полученные результаты принадлежат Хайзи.

---

[1] dir lim — прямой предел, т.е. предел прямого спектра. — *Прим. перев.*

(RQ1) Будет ли $M \times R^\infty$ гомеоморфно M для R^∞-многообразия M? Это верно, если M является открытым подмножеством R^∞.

(RQ2) Для Q^∞-многообразия известно, что $M \times Q^\infty$ гомеоморфно M. Существуют ли гомеоморфизмы $h: M \times Q^\infty \to M$, сколь угодно близкие к проектированию $M \times Q^\infty \to M$?

(RQ3) Для всякого ли Q^∞-многообразия M существует такой счетный локально конечный симплициальный комплекс X, что M гомеоморфно $X \times Q^\infty$? Встает ли аналогичный вопрос о R^∞-многообразиях?

XIII. ANR *Характеризации ANR-пространств*

Побудительные мотивы к отысканию характеризаций *ANR*-пространств даны теоремами Эдвардса и Торунчика о том, что произведения *ANR*-пространств с надлежащими стандартными бесконечномерными пространствами суть бесконечномерные многообразия. Кроме того, некоторые характеризации пространств как бесконечномерных многообразий связаны теперь с тем, является ли рассматриваемое пространство абсолютным окрестностным ретрактом.

Недавно нашли полезное применение следующие результаты, которые дают достаточные условия для того, чтобы пространство было абсолютным окрестностным ретрактом.

(1) (Хэйвер) Если локально стягиваемое метрическое пространство X может быть записано как счетное объединение конечномерных компактов, то X есть *ANR*.

(2) (Торунчик) X есть *ANR* тогда и только тогда, когда существует такое пространство E, что $X \times E$ имеет базу $\mathscr{B}$ открытых множеств, для всякого конечного подсемейства $\mathscr{C}$ которой пересечение $\cap \mathscr{C}$ линейно связно и имеет тривиальные гомотопические группы.

(3) (Козловский) Y есть *ANR*, если существует абсолютный окрестностный ретракт X и такое отображение $f: X \to Y$ на плотное в Y подмножество, что для всякого открытого покрытия $\mathscr{V}$ пространства Y существует отображение $g: Y \to X$ и ограниченная покрытием $f^{-1}\mathscr{V}$ гомотопия $h_t: X \to X$, связывающая тождественное отображение id_X с gf.

Следующие вопросы инспирированы проблемой группы гомеоморфизмов.

(ANR 1) Если пространство имеет открытую базу из стягиваемых множеств, то будет ли оно *ANR*-пространством?

(ANR 1a) Будет ли *ANR*-пространством топологическая группа, имеющая открытую базу из стягиваемых множеств?

Более классическими являются взаимоотношения линейных пространств и абсолютных ретрактов.

(ANR 2) Всякое ли метризуемое линейное пространство является абсолютным ретрактом?

(ANR 2a) Всякое ли сепарабельное метризуемое линейное пространство является абсолютным ретрактом?

Проблема 2а и проблемы группы гомеоморфизмов связаны свойствами пренебрежимости.

Согласно Козловскому, подмножество A пространства X называется *смутным* при условии, что включение $U \setminus A \to U$ является гомотопической эквивалентностью для всякого открытого подмножества U из X. Он показал, что отображение $f\colon X \to Y$ есть гомотопическая эквивалентность над каждым открытым подмножеством из Y тогда и только тогда, когда f является тонкой гомотопической эквивалентностью. В качестве следствия имеем, что если $X \setminus X_0$ смутно в X и X_0 есть ANR, то X также есть ANR.

В настоящее время представляется существенно более сложным проверить то, что множество смутно, нежели то, что оно только локально гомотопически пренебрежимо. В частности, следующие вопросы открыты.

(ANR 3) Будет ли $X \setminus X_0$ смутно в X, когда:

(а) X — сепарабельное линейное пространство, а X_0 — линейная оболочка счетного плотного подмножества,

(б) X есть компонента тождественного отображения в группе гомеоморфизмов $H(M)$ замкнутого PL-многообразия M размерности $\geqslant 5$, а X_0 состоит из всех PL-гомеоморфизмов M, находящихся в X?

В (ANR 3а) и (3б) известно, что $X \setminus X_0$ удовлетворяет более слабому свойству пренебрежимости.

Подмножество A пространства X называется *локально гомотопически пренебрежимым* (сокращенно л.г.п.) при условии, что включение $U \setminus A \to U$ является слабой гомотопической эквивалентностью для всякого открытого множества U в X. Торунчик показал, что это эквивалентно его первоначальному определению л.г.п. и что если X есть ANR, а $X \setminus X_0$ л.г.п., то X_0 есть ANR. К сожалению, обращение этого последнего результата неверно: пример Тейлора дает такое CE-отображение $f\colon Q \to Y$, что Y не есть ANR, хотя Y является л.г.п. подмножеством цилиндра $M(f)$ отображения f (Ланер, Торунчик), а $M(f) \setminus Y$ является абсолютным окрестностным ретрактом.

XIV. HS *Пространства гомеоморфизмов и отображений*

Пусть M — компактное n-многообразие; тогда $H(M)$ обозначает пространство гомеоморфизмов M, а $H_\partial(M)$ — подпространство $H(M)$, состоящее из гомеоморфизмов, тождественных

на крае $\partial M (H_\partial(M) = H(M)$ в случае $\partial M = \varnothing$). Известно (Андерсон), что пространство $H_\partial(I)$ гомеоморфно s (или l_2).

Одной из наиболее интересных в настоящее время проблем, затрагивающих l_2-многообразия, является следующая проблема, часто упоминаемая как «проблема группы гомеоморфизмов».

(HS1) Будет ли $H_\partial(M)$ l_2-многообразием для компактного n-многообразия?

Много усилий было приложено к решению этой проблемы. Главные результаты из полученных следующие:

(1) (Гэган) Для всякого многообразия M конечной положительной размерности произведение $H_\partial(M) \times l_2$ гомеоморфно $H_\partial(M)$.

(2) (Торунчик) Если $H_\partial(M)$ есть ANR, то $H_\partial(M) \times l_2$ есть l_2-многообразие.

Как следствие этих результатов мы знаем, что $H_\partial(M)$ есть l_2-многообразие тогда и только тогда, когда $H_\partial(M)$ есть ANR. Хэйвер дал следующую редукцию свойства $H_\partial(M)$ быть ANR-пространством к свойству $H_\partial(B^n)$ быть AR-пространством: для данного компактного n-многообразия M взять его покрытие n-клетками B_i^n $(1 \leqslant i \leqslant p)$; согласно Эдвардсу и Кёрби, существует такая открытая окрестность N тождественного отображения, что любое $R \in N$ может быть записано как композиция $h = h_p \ldots h_1$, где $R_i \in H_\partial(B_i^n)$, и соответствие $h \to (h_p, \ldots, h_1)$ определяет отображение φ: $N \to P = \Pi_{i=1}^p H_\partial(B_i^n)$; ясно, что композиция определяет отображение открытой окрестности Q множества φN в N, которое показывает, что φN гомеоморфно N как ретракт G; таким образом, по теореме Ханнера, если $H_\partial(B^n)$ есть AR, $H_\partial(M^n)$ есть ANR.

Следовательно, (HS1) может быть сведена к следующей проблеме.

(HS2) Является ли $H_\partial(B^n)$ $(n > 2)$ AR-пространством?

Мэйсон и Люк показали, что $H_\partial(M)$ есть ANR для любого компактного 2-многообразия и, значит, $H_\partial(M)$ и $H(M)$ суть l_2-многообразия.

Подвергнуто изучению также $PLH(M)$-пространство кусочно-линейных гомеоморфизмов компактного PL-многообразия M. Комбинированная работа нескольких авторов, окончательно сформулированная Кислингом и Вильсоном, показывает, что $PLH(M)$ есть l_2^f-многообразие. Комбинируя этот результат с теоремой Уайтхеда и обсуждением смутных множеств предыдущего раздела [ANR], проблему группы гомеоморфизмов для замкнутого PL-многообразия M можно редуцировать к следующей.

(HS3) Пусть M — замкнутое PL-многообразие размерности по крайней мере 5. Всякое ли открытое подмножество из $H(M)$ гомотопически доминируется CW-комплексом?

Хэйвер изучал $\bar{H}(M)$-замыкание $H(M)$ в пространстве всех отображений компактного многообразия в себя. Он показал, что $\bar{H}(M) \setminus H(M)$ является счетной суммой Z-множеств в M. Следовательно, если $\bar{H}(M)$ есть l_2-многообразие, то $H(M)$ также является l_2-многообразием.

(HS4) Будет ли $\bar{H}(M)$ абсолютным окрестностным ретрактом и, значит (поскольку Гэган и Хандерсон показали, что $\bar{H}(M) \times l_2$ гомеоморфно $\bar{H}(M)$), l_2-многообразием? В случае положительного ответа $H(M)$ также было бы l_2-многообразием.

(HS5) Можно ли элементы из $\bar{H}(M)$ непрерывно аппроксимировать гомеоморфизмами, т.е. существует ли для каждого $\varepsilon > 0$ такое отображение h: $H(M) \to H(M)$, что $d(h, \mathrm{id}) < \varepsilon$?

XV. LS *Линейные пространства*

В некотором смысле бесконечномерная топология берет свое начало с поставленных Фреше и Банахом топологических проблем, не касающихся связей между линейной и топологической структурами линейного пространства. Несмотря на то что почти все из первоначально поставленных проблем были решены, остаются открытыми несколько интригующих вопросов. Бессага, Пелчинский и Торунчик — это, вероятно, лучший источник, касающийся таких проблем. Сначала мы укажем проблемы, относящиеся к сепарабельным пространствам.

(LS1) Всякое ли бесконечномерное сепарабельное нормированное пространство гомеоморфно некоторому предгильбертову пространству, т.е. линейному пространству (не обязательно замкнутому) гильбертова пространства?

(LS2) Пусть X — бесконечномерное сепарабельное предгильбертово пространство. Будет ли X гомеоморфно следующим пространствам: $X \times R$, $X \times X$, X_f^ω, X^ω? Ответы скорее всего отрицательны, если мы потребуем существование равномерного гомеоморфизма.

(LS3) Если σ-компактное сепарабельное нормированное пространство E содержит топологическую копию Q' гильбертова кирпича Q, то будет ли E гомеоморфно множеству $\{x \in l_2 \colon \Sigma i^2 \cdot x_i^2 < \infty\}$? Заметим, что замкнутая выпуклая оболочка Q' не обязана быть компактной.

(LS4) Описать классы подмножеств l_2, гомеоморфных Q. Результат должен быть более общим или сформулирован в совершенно других терминах, нежели келлерова характеризация всех бесконечномерных компактных выпуклых подмножеств l_2 как множеств, гомеоморфных Q.

(LS5) Пусть E — локально выпуклое линейное метрическое пространство, а X — неполный ретракт E. Будет ли $X \times E^\omega$ гомеоморфно E^ω? Торунчиком доказано, что $X \times E^\omega \times l_2^f$ гомео-

морфно $E^{\omega} \times l_2^f$ и если X полно, то $X \times E^{\omega}$ гомеоморфно E^{ω}. Теперь некоторые проблемы о несепарабельных пространствах.

(LS6) Всякое ли бесконечномерное банахово пространство гомеоморфно некоторому гильбертову пространству?

(LS7) Всякое ли бесконечномерное банахово пространство E гомеоморфно E^{ω}?

Результат известен для гильбертовых пространств. Положительный ответ на этот вопрос должен был бы распространить область действия многих теорем, где предполагается, что E гомеоморфно E^{ω}, на несепарабельные пространства и многообразия.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Т.Чепмэн

ЛЕКЦИИ О Q-МНОГООБРАЗИЯХ

Научный редактор А.А. Бряндинская
Мл. научный редактор Л.С. Суркова
Художник А.В. Шипов
Художественный редактор В.И. Шаповалов
Технический редактор Т.А. Максимова
Корректор Н.В. Андреева

ИБ № 2209

Подписано к печати 03.06.81.
Формат 60 × 90 1/16.
Бумага офсетная № 1.
Гарнитура таймс. Печать офсетная. Объем 5 бум.л.
Усл.печ.л. 10. Усл.кр.-отт. 10,23.
Уч.-изд.л. 8,10. Изд. № 1/1137.
Тираж 5700 экз. Зак. Цена 1 р.

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
Москва, 1-й Рижский пер., 2.

Набрано на фотонаборном демонстрационном комплексе
в издательстве «Мир».

Отпечатано в Экспериментальной типографии
ВНИИ полиграфии
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли.
Москва, К-51, Цветной бульвар, 30.

УВАЖАЕМЫЙ ЧИТАТЕЛЬ!

Ваши замечания о содержании книги, ее оформлении, качестве перевода и другие просим присылать по адресу: 129820, Москва, И-110, ГСП, 1-й Рижский пер., д. 2, издательство «Мир».

В ИЗДАТЕЛЬСТВЕ «МИР»

ГОТОВИТСЯ К ВЫПУСКУ

Том Дик Т. ГРУППЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ И ТЕОРИЯ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ. Пер. с англ. — 13 л. 1 р. 90 к. План 1982 г., № 5.

Книга известного западногерманского математика, посвященная топологической классификации нелинейных представлений конечных и компактных групп. Эта теория находится на стыке алгебры, топологии и геометрии. Изложение начинается с простых понятий и сопровождается упражнениями.

Для математиков различных специальностей, аспирантов и студентов университетов.

УВАЖАЕМЫЙ ЧИТАТЕЛЬ!

Заблаговременно оформляйте заказ на интересующие Вас книги. Заказы принимаются в магазинах, торгующих научно-технической литературой.

1 руб.

НОВОЕ В ЗАРУБЕЖНОЙ НАУКЕ

ИЗДАТЕЛЬСТВО "МИР" МОСКВА